



Kochajcie trygonometrię, dziewczęta

Bartłomiej BZDEGA

Trygonometria, z zupełnie niezrozumiałych dla mnie powodów, bywa uznawana za brzydką metodę rozwiązywania zadań olimpijskich. Niestety skutkuje to tym, że młodzież mniej chętnie uczy się tego ważnego działu matematyki. Być może znalezienie odcinka, którego dorysowanie natychmiast rozwiązuje problem, jest nieco bardziej eleganckie niż stosowanie twierdzenia sinusów, ale nie ma gwarancji, że taki odcinek zdążymy w czasie zawodów znaleźć. Dlatego warto w swym arsenale mieć dodatkowe narzędzia, które, choć bardziej toporne, w niektórych warunkach są nieco pewniejsze.

W poniższych twierdzeniach używamy *standardowych oznaczeń*: niech α, β, γ będą miarami kątów przy wierzchołkach odpowiednio A, B, C trójkąta ABC , zaś a, b, c – długościami boków naprzeciw nich. Przez R oznaczamy promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Twierdzenie sinusów: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$.

Twierdzenie cosinusów: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ (analogicznie a^2 i b^2).

Pole trójkąta: $[ABC] = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ca \sin \beta$.

Nie będziemy wymieniać tu wzorów redukcyjnych ani innych tożsamości trygonometrycznych. Czytelnik, jeżeli jeszcze nie zapoznał się z nimi na lekcji matematyki w szkole średniej, znajdzie je w tablicach matematycznych.

Na koniec dwie uwagi do twierdzenia sinusów. Wynika z niego równość proporcji $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ (i dwie analogiczne), więc możemy płynnie przechodzić pomiędzy długościami boków i sinusami kątów trójkąta. Ponadto do korzystania z twierdzenia sinusów wcale nam trójkąta nie potrzeba, gdyż łączy ono długość d cięciwy okręgu, która wyznacza kąt wpisany δ , z promieniem R tego okręgu: $\frac{d}{\sin \delta} = 2R$.

Zadania

- Wykazać, że dla równoległoboku $ABCD$ zachodzi równość $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2$.
- Punkt P leży na boku AB trójkąta ABC . Niech $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AP| = x$ i $|BP| = y$. Dowieść, że $|CP|^2 = \frac{a^2x + b^2y}{x+y} - xy$ (twierdzenie Stewarta).
- Ustalmy półproste p_a, p_b, p_c i p_d , mające wspólny początek P , które zostały podane w kolejności antyżegarowej. Prosta ℓ przecina je odpowiednio w punktach A, B, C i D . Dowieść, że wartość wyrażenia $\frac{|AC| \cdot |BD|}{|BC| \cdot |AD|}$ nie zależy od wyboru prostej ℓ (niezmienniczość dwustosunku).
- Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach BC i CD , przy czym trójkąt AKL jest równoboczny. Dowieść, że suma pól trójkątów ABK i ALD jest równa polu trójkąta CLK .
- Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg. Na tym okręgu leży punkt P . Udowodnić, że iloczyn odległości punktu P od prostych AB i CD jest równy iloczynowi odległości punktu P od prostych BC i DA .
- Punkty P, Q, R leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC . Spełnione są następujące równości:

$$|AR| = |RP| = |PC|, \quad |BR| = |RQ| = |QC|.$$

Wykazać, że $|AC| + |BC| = 2|AB|$.

- W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ zachodzą następujące równości:

$$|AB| = |BC| = |CD|, \quad |AE| = |EB| = |BD|, \quad |AC| = |CE| = |ED|.$$

Wyznaczyć miary kątów tego pięciokąta.

- W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .

Wskazówki do zadań
 1. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych równoległoboku. Wyznaczycie $|AB|^2$ z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABP , podobnie trzy pozostałe kwadraty długości boków.
 2. Mamy $\cos \angle APC = -\cos \angle BPC$. Wyznaczycie lewą i prawą stronę z twierdzenia cosinusów dla trójkątów APC i BPC ; a następnie odpowiednio APC i BPC ; a następnie przeksztalcic otrzymaną równość, by otrzymac $|CP|^2$.
 3. Niech h będzie odległością punktu P od prostej ℓ . Oznaczmy przez α, β, γ kąty $\angle P, \angle P, \angle P$ i p_a, p_b, p_c, p_d . Wówczas obliczając pomiedzy półprostymi odpowiadajac p_a, p_b, p_c, p_d i p_a, p_b, p_c, p_d na dwa sposoby pole trójkąta APC , otrzymamy $|AC| = \frac{h}{\sin \alpha} + \frac{h}{\sin \beta}$. Analogicznie nalezy postapic z odcinkami BD, BC i AD .
 4. Przy standardowych oznaczeniach, jeśli $\gamma = 90^\circ$, to $|ABC| = \frac{1}{2}c^2 \sin 2\alpha$. Niech $\varphi = 2|\angle BAK|$. Zadanie sprowadza się do wykazania równości $\sin \varphi + \sin(60^\circ - \varphi) = \sin(60^\circ + \varphi)$.
 5. Przy standardowych oznaczeniach wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C ma długość $\frac{ab}{c}$. Odległości punktu P od prostych AB, BC, CD i DA są odpowiednio CDP, DAP .
 6. Niech $|AR| = x$ i $|BR| = y$. Obliczając pole trójkąta ABC na dwa sposoby, otrzymamy równość $\frac{1}{2}ab \sin \gamma = x y \sin \gamma + \frac{1}{2}(y - x)(a - x) \sin \gamma$ (oznaczenia standardowe).
 7. Przyslijmy oznaczenia $x = |AB|, y = |AE|, z = |AC|$ oraz $\varphi = \angle BAC$.
 8. Przyslijmy standardowe oznaczenia kątach.
 9. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 10. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 11. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 12. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 13. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 14. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 15. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 16. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 17. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 18. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 19. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 20. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 21. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 22. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 23. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 24. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 25. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 26. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 27. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 28. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 29. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 30. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 31. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 32. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 33. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 34. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 35. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 36. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 37. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 38. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 39. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 40. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 41. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 42. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 43. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 44. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 45. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 46. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 47. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 48. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 49. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 50. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 51. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 52. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 53. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 54. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 55. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 56. W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .
 57.