Jeśli θ jest pierwiastkiem wielomianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych, to możemy zakładać, że $\theta = \sqrt{d}$, gdzie d jest *bezkwadratową* liczbą całkowitą. Wówczas pierścień liczb całkowitych ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ to po prostu $\mathbb{Z}(\sqrt{d})$, wtedy gdy d jest postaci $4k+2$ lub $4k+3$. Natomiast dla liczb postaci $4k+1$ ten pierścień to $\mathbb{Z}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{d})$.

Liczba bezkwadratowa to taka liczba całkowita, która nie jest podzielna przez żaden kwadrat liczby całkowitej z wyjątkiem 1. Na przykład 10 jest liczbą bezkwadratową, ale 18 nie jest, bo 18 jest podzielne przez $9 = 3^2$.

Przykładem pierścienia, w którym nie ma jednoznaczności rozkładu, jest $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$. W pierścieniu tym mamy na przykład $6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$. Aby badać problem jednoznaczności rozkładu w pierścieniach typu $\mathbb{Z}(\sqrt{d})$ lub $\mathbb{Z}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{d})$, wprowadzono pojęcie *liczby klas*. Liczba klas ciała służy do rozpoznawania, czy wspomniane pierścienie mają własność jednoznaczności rozkładu, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczba klas jest równa 1. Udowodniono, że istnieje dokładnie dziewięć pierścieni ciał liczbowych $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, gdzie d jest bezkwadratową ujemną liczbą całkowitą, mających własność jednoznaczności rozkładu. Te liczby to: $-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$.

Liczba klas dla ciał postaci $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ to pojęcie związane z funkcjami postaci $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Bierzemy zbiór wszystkich takich funkcji (często używa się nazwy *forma kwadratowa* dwóch zmiennych) o ustalonym wyróżniku $b^2 - 4ac$ i wprowadzamy pewną relację równoważności w tym zbiorze. Relacja ta dzieli rozpatrywany zbiór na rozłączne klasy abstrakcji. Klas tych jest zawsze skończenie wiele, a ich liczbę nazywamy liczbą klas ciała liczbowego.

Powróćmy teraz do permutacji Josephusa. Przypomnijmy, że rozważamy takie n, że n oraz $2n+1$ są liczbami pierwszymi oraz n jest postaci $4k+3$. Okazało się, że długości cykli można wykorzystać do obliczania liczby klas niektórych ciał liczbowych postaci $\mathbb{Q}\big(\sqrt{-(2n+1)}\big)$. W każdym takim ciele pierścień liczb całkowitych to $\mathbb{Z}\big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-(2n+1)}\big)$. I tutaj niespodzianka: liczbę klas ciała $\mathbb{Q}\big(\sqrt{-(2n+1)}\big)$ można wyznaczyć, korzystając z długości cykli zamieszczonych w tabeli 1. Liczba klas ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ (czyli $n=3$) wynosi $2-1=1$, liczba klas ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ ($n=11$) wynosi $7-4=3$. Dla ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{-47})$ ($n=23$) mamy liczbę klas $14-9=5$ i tak dalej.

Autorowi tekstu nie udało się niestety znaleźć informacji, czy odkrycie Hersteina i Kaplansky'ego zostało w pełnej ogólności udowodnione i opublikowane.

Przedstawiliśmy zadanie, problem Flawiusza, które ma już ponad 400 lat (de Méziriac opublikował je w książce wydanej w 1612 roku), ale wciąż wzbudza spore zainteresowanie. Mnóstwo informacji na ten temat można znaleźć w *Matematyce konkretnej* [3]. Zachęcamy do zapoznania się z tą piękną książką, zawierającą mnóstwo interesujących faktów dotyczących rozpatrywanych tu zagadnień.

[1] A.M. Odlyzko, H.S. Wilf `Functional iteration and the Josephus problem`, Glasgow Mathematical Journal, v. 33 (1991), 235–240.

[2] I.N. Herstein, I. Kaplansky *Matters Mathematical*, American Mathematical Society (1978).

[3] L.R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik *Matematyka konkretna*, PWN (2019).

Zadania

Przygotował Łukasz RAJKOWSKI

M 1624. Znaleźć największą wartość sumy $\sum_{i<j\leqslant n} |x_i - x_j|$, gdzie $x_i \in [0,1]$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.
Rozwiązanie na str. 17

M 1625. Znaleźć największą liczbę parami różnych punktów kratowych (x_i, y_i), $x_i, y_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, spośród których nie można wybrać czterech wierzchołków równoległoboku.
Rozwiązanie na str. 13

M 1626. Znaleźć największe pole trójkąta o bokach PA, PB, PC, gdzie P jest punktem wewnątrz trójkąta równobocznego ABC o boku 1.
Rozwiązanie na str. 6

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 991. Podczas skurczu serce dorosłego człowieka wyrzuca $V = 70\,\mathrm{ml}$ krwi pod ciśnieniem $p = 1{,}6 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$ ($120\,\mathrm{mmHg}$). Skurcz serca następuje ze średnią częstością $n = 70/\mathrm{min}$. (Wszystkie dane dla człowieka spoczywającego). Oszacuj średnią moc serca L.
Rozwiązanie na str. 7

F 992. Kiedy już podróże kosmiczne staną się powszechne, policja na pewno będzie chciała fotografować kosmonautów łamiących „przepisy ruchu kosmicznego”. Oszacuj, z jakiej odległości L policjant będzie jeszcze mógł odczytać numer rejestracyjny pojazdu, jeśli wykona zdjęcie w świetle widzialnym za pomocą teleskopu Hubble'a o średnicy zwierciadła $D = 2{,}4\,\mathrm{m}$, a tablice rejestracyjne będą miały taką formę jak dzisiaj.
Rozwiązanie na str. 6