Szły raz drogą trzy sześciany

Bartłomiej BZDĘGA

Głównymi bohaterkami styczniowego kącika są następujące równości:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(b+c)(c+a)(a+b), \tag{1}$$

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)+3abc, \tag{2}$$

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)\cdot\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{2}+3abc. \tag{3}$$

Każda z nich jest łatwa do udowodnienia przez wymnożenie i redukcję wyrazów podobnych po prawej stronie. Nie będziemy tu tego robić.

Z tożsamości (3) natychmiast wnioskujemy następujący

Lemat. Jeśli $a+b+c=0$, to $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Można go również sformułować w postaci równości

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b). \tag{4}$$

Zadania

1. Udowodnić, że $a^3+b^3+c^3=3abc$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a+b+c=0$ lub $a=b=c$.
2. Liczby rzeczywiste a, b spełniają równość $a^3+b^3+1=3ab$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrażenia $a+b$.
3. Liczby x, y, z są rzeczywiste. Udowodnić, że jeśli
$$\sqrt[3]{y-z}+\sqrt[3]{z-x}+\sqrt[3]{x-y}=0,$$
to pewne dwie z liczb x, y, z są równe.
4. Udowodnić nierówność pomiędzy średnią geometryczną i arytmetyczną:
$$\sqrt[3]{xyz}\leqslant\frac{x+y+z}{3}\quad \text{dla } x,y,z>0.$$
5. Wykazać, że liczba n^6+4n^3-1 jest złożona dla każdej liczby całkowitej dodatniej n.
6. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (x,y,z), które spełniają równości
$$x+y+z \;=\; x^2+y^2+z^2 \;=\; x^3+y^3+z^3 \;=\; 1.$$
7. Liczby całkowite a, b, c spełniają równość
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=abc.$$
Dowieść, że $a+b+c+6 \mid a^3+b^3+c^3$.
8. Liczby a, b, c są całkowite. Wykazać, że jeśli liczba $a^3+b^3+c^3-3abc$ dzieli się przez 3, to dzieli się ona również przez 9.
9. Udowodnić, że $327^3+298^3<395^3$. Uczynić to bez pomocy kalkulatora, wykonując przy tym możliwie najmniej rachunków.
10. Dana jest liczba pierwsza $p>3$ oraz takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, że
$$a+b+c=p+1 \quad\text{oraz}\quad p \mid a^3+b^3+c^3-1.$$
Dowieść, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 1.
11. Różne liczby rzeczywiste x, y, z spełniają równość
$$(x-y)\sqrt[3]{1-z^2}+(y-z)\sqrt[3]{1-x^2}+(z-x)\sqrt[3]{1-y^2}=0.$$
Dowieść, że $(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)=(1-xyz)^3$.
12. Liczby całkowite a, b, c spełniają równość
$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0.$$
Udowodnić, że $a=b=c=0$.

Wskazówki do zadań

1. Wykorzystać tożsamość (3) i najważniejszą nierówność na świecie (zob. kącik nr 5).
2. W równości (3) przyjąć $c=1$. Są tu dwa przypadki do rozważania.
3. Skorzystać z lematu dla liczb $a=\sqrt[3]{y-z}$, $b=\sqrt[3]{z-x}$ i $c=\sqrt[3]{x-y}$.
4. Przyjąć $a=\sqrt[3]{x}$, $b=\sqrt[3]{y}$ i $c=\sqrt[3]{z}$ w tożsamości 3.
5. Należy zauważyć, że $n^6+4n^3-1=(n^2)^3+n^3+(-1)^3-3\cdot n^2\cdot n\cdot(-1)$, i użyć tożsamości (2) dla $a=n^2$, $b=n$ i $c=-1$.
6. Zachodzi równość $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3$ i dzięki tożsamości (1) dochodzimy do wniosku, że wśród liczb x, y, z występuje co najmniej jedna para liczb przeciwnych.
7. Korzystając z (3), otrzymamy $a^3+b^3+c^3=\frac{1}{2}abc\cdot(a+b+c+6)$. Wystarczy teraz wykazać, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest parzysta. To wynika z równości danej w zadaniu.
8. Na mocy tożsamości (3) wystarczy wykazać, że $3 \mid a+b+c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $3 \mid (b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$. To ma miejsce dokładnie wtedy, gdy liczby a, b, c dają trzy jednakowe albo trzy różne reszty z dzielenia przez 3.
9. Korzystając z (1), otrzymujemy $327^3+298^3-395^3=230^3-3\cdot 625\cdot 68\cdot 97=500(46\cdot 529-255\cdot 97)$. Dalej można np. zauważyć, że $255\cdot 97=46\cdot 510+255\cdot 5$.
10. W równości (1) podstawić $a+b+c=p+1$ i $a^3+b^3+c^3=kp+1$, gdzie k jest jakąś liczbą całkowitą. Wywnioskować stąd, że $p \mid (b+c)(c+a)(a+b)$, więc któryś z czynników dzieli się przez p. Te czynniki są dodatnie i nie przekraczają p, więc któryś z nich jest równy p.
11. Skorzystać z lematu dla $a=(y-z)\sqrt[3]{1-x^3}$, $b=(z-x)\sqrt[3]{1-y^3}$ i $c=(x-y)\sqrt[3]{1-z^3}$. Następnie zauważyć, że $(y-z)^3(1-x^3)+(z-x)^3(1-y^3)+(x-y)^3(1-z^3)=(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3+(zx-xy)^3+(xy-yz)^3+(yz-zx)^3$ i dwukrotnie użyć równości (4).
12. Na mocy lematu $a^3+2b^3+4c^3=6abc$. Wykazać kolejno, że $a=2a_1$, $b=2b_1$ i $c=2c_1$ dla pewnych całkowitych a_1, b_1, c_1 i zauważyć, że $a_1^3+2b_1^3+4c_1^3=6a_1b_1c_1$. Następnie to samo rozumowanie zastosować do a_1, b_1 i c_1. Ten proces można kontynuować w nieskończoność, co dowodzi, że każda potęga dwójki dzieli a, b i c, czyli $a=b=c=0$.