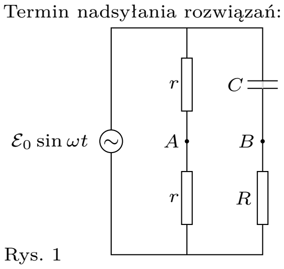
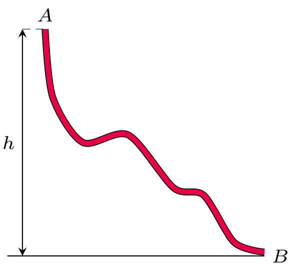
Klub 44 F

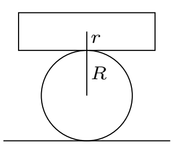
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2020



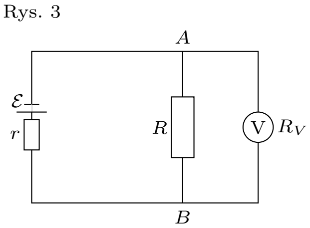
Rys. 1



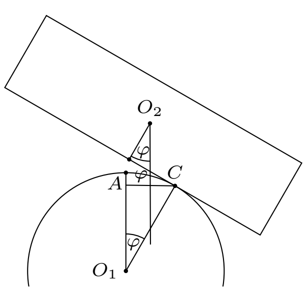
Rys. 2



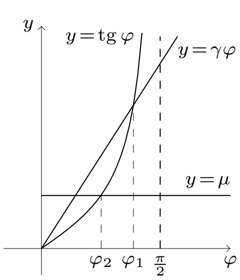
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Zadania z fizyki nr 690, 691

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

690. Jak zależy amplituda napięcia między punktami A i B, w obwodzie przedstawionym na rysunku 1, od oporu R ?

691. Elastyczna rurka o długości l łączy w przestrzeni punkty A i B. Różnica wysokości między tymi punktami wynosi h (rys. 2). Wewnątrz rurki wzdłuż całej jej długości leży sznurek, który przytrzymywany jest w punkcie A. Z jakim przyspieszeniem zacznie poruszać się sznurek w pierwszej chwili po jego oswobodzeniu? Tarcie między sznurkiem a ściankami rurki zaniedbujemy.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2019

Przypominamy treść zadań:

682. Na nieruchomym, poziomym walcu o promieniu R leży walec o promieniu r, również poziomo (rys. 3). Osie walców są wzajemnie prostopadłe. Przy jakim stosunku promieni równowaga górnego walca będzie trwała? O jaki maksymalny kąt można przy tym odchylić od poziomu górny walec? Współczynnik tarcia między walcami jest równy μ.

683. W obwodzie przedstawionym na rysunku 4 opór zewnętrzny R jest dużo większy niż opór wewnętrzny ogniwa: $r \ll R$. Podłączenie woltomierza o oporze R_V powoduje zmianę napięcia między punktami A i B. Jaka powinna być relacja między oporami R i R_V, aby to zaburzenie było jak najmniejsze?

682. W położeniu równowagi środki mas obu walców leżą na wspólnej prostej pionowej. Odchylmy górny walec z położenia równowagi o pewien kąt φ (rys. 5). Załóżmy na początku, że tarcie statyczne jest na tyle duże, że nie ma poślizgu między walcami. Punkt styczności walców przemieszcza się z punktu A do punktu C, punkt górnego walca, który stykał się z walcem, przemieszcza się do punktu B. Ponieważ nie ma poślizgu, długość łuku AC równa jest długości odcinka BC: $R\varphi = |BC|$. Jeżeli prosta pionowa przechodząca przez środek masy O_2 odchylonego walca znajduje się z lewej strony nowego punktu styczności C, siła ciężkości będzie powodować powrót górnego walca do położenia równowagi. Spełniony musi być warunek: $r \sin\varphi < |BC| \cos\varphi = R\varphi \cos\varphi$. Stąd $r/R = \varphi/\operatorname{tg}\varphi$. Ponieważ $0 < \varphi < \pi/2$, więc $\operatorname{tg}\varphi > \varphi$. Równowaga górnego walca będzie trwała, gdy $r/R < 1$.

Szukany stosunek promieni możemy też znaleźć z żądania, że energia potencjalna odchylonego walca musi być większa niż energia początkowa. Rozważmy przyczyny ograniczające wartość dopuszczalnego kąta odchylenia. Po pierwsze, dla dużych kątów odchylenia linia pionowa przechodząca przez środek ciężkości górnego walca może znaleźć się po prawej stronie punktu styczności C. Przy ustalonym stosunku promieni $\gamma = R/r > 1$ maksymalny kąt odchylenia dany jest równaniem $\operatorname{tg}\varphi_1 = \gamma\varphi_1$. Rozwiązanie tego równania można znaleźć metodą graficzną (rys. 6). Po drugie, walec nie powinien się ześlizgiwać, zatem kąt odchylenia ograniczony jest warunkiem $\operatorname{tg}\varphi_2 = \mu$. Z rysunku 6 widać, że maksymalny kąt odchylenia jest równy mniejszej z dwóch wartości φ_1 i φ_2. Ponieważ współczynnik tarcia μ jest zwykle mniejszy od jedynki, dopuszczalny kąt odchylenia na ogół określony jest przez warunek poślizgu, czyli przez kąt φ_2.

683. Przed podłączeniem woltomierza napięcie między punktami A i B wynosi $U = \varepsilon R/(r+R)$. Po podłączeniu $U_1 = \varepsilon R_z/(r+R_z)$, gdzie $R_z = RR_V/(R+R_V)$. Podłączenie woltomierza powoduje wzrost natężenia prądu płynącego przez źródło, co pociąga za sobą wzrost napięcia na oporze wewnętrznym źródła i obniżenie napięcia między punktami A i B. Zachodzi relacja $U_1 < U$. Względne zaburzenie napięcia między punktami A i B wynosi

$$\Delta U/U = (U - U_1)/U = rR/(RR_V + r(r+R_V)),$$

co można oszacować

$$\Delta U/U \approx \begin{cases} r/(R_V + 2r) \approx r/R_V, & \text{gdy } r \ll R \approx R_V, \\ r/(R_V + r) \approx r/R_V, & \text{gdy } r \ll R_V \ll R, \\ r/R_V, & \text{gdy } r \ll R \ll R_V. \end{cases}$$

Względne zaburzenie pomiaru jest tym mniejsze, im większy jest stosunek oporu woltomierza do oporu wewnętrznego ogniwa, niezależnie od relacji między R i R_V.

Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2020

Zadania z matematyki nr 793, 794

Redaguje Marcin E. KUCZMA

793. Okręgi Ω i ω przecinają się w punktach A i B. Środek S okręgu ω leży na okręgu Ω i jest końcem jego średnicy NS. Cięciwa CS okręgu Ω, niebędąca średnicą, przecina okrąg ω oraz odcinek AB odpowiednio w punktach I oraz J. Prosta przechodząca przez I, równoległa do NS, przecina odcinek NC w punkcie K. Dowieść, że prosta IN przechodzi przez środek odcinka JK.

794. Dla liczb rzeczywistych $x, y, z \geqslant 0$ przyjmijmy: $R(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $Q(x,y,z) = \sqrt{xy+xz+yz}$. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\frac{1}{R(a,b,c)Q(b,c,d)} + \frac{1}{R(b,c,d)Q(a,c,d)} + \frac{1}{R(a,c,d)Q(a,b,c)}$$

dla liczb $a, b, c, d \geqslant 0$ spełniających warunek $2a+2b+3c+2d \leqslant 6$ oraz wyznaczyć wszystkie czwórki (a,b,c,d), dla których to minimum jest osiągane.

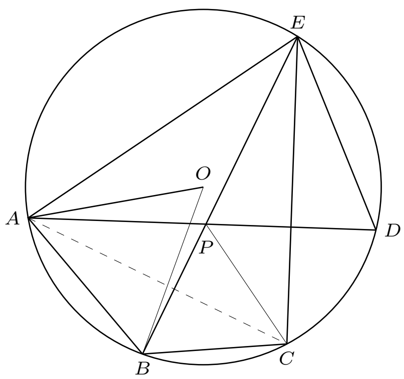
Zadanie 794 zaproponował pan Mikołaj Pater.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2019

Przypominamy treść zadań:

785. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg o środku O; przy tym $|BC| = |CD|$. Przekątne AD i CE są prostopadłe, zaś przekątne AD i BE przecinają się w takim punkcie P, że $|AP| = |AO|$. Wykazać, że trójkąt BCP jest równoboczny.

786. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele czwórek różnych liczb naturalnych (a,b,c,d) o tej własności, że każdy z iloczynów ab, bc, ac, bd, cd jest o 1 większy od kwadratu pewnej liczby naturalnej.



785. Skoro $|BC| = |CD|$, punkt C jest środkiem łuku BD; zatem prosta EC jest dwusieczną kąta wpisanego BED. Przy tym jest prostopadła do prostej AD; jest więc symetralną odcinka PD. Stąd wynika, że

$$|EP| = |ED| \quad \text{oraz} \quad |CP| = |CD| = |CB|.$$

Cięciwy AD i BE, przecinające się w punkcie P, wyznaczają trójkąty podobne: $\triangle PAB \sim \triangle PED$; a ponieważ $|ED| = |EP|$, zatem $|AB| = |AP| = |AO|$ (ostatnia równość jest dana w założeniach). To pokazuje, że trójkąt OAB jest równoboczny, wobec czego $|\sphericalangle AOB| = 60^\circ$. W takim razie $|\sphericalangle ACB| = 30^\circ$.

Czworokąt $ABCP$ to deltoid ($|AB| = |AP|$, $|CB| = |CP|$); stąd $|\sphericalangle BCP| = 2 \cdot |\sphericalangle ACB| = 60^\circ$. Wobec wcześniejszego spostrzeżenia, że $|CP| = |CB|$, dostajemy tezę zadania: trójkąt BCP jest równoboczny.

786. Przykład Autora zadania (W. Bednarek): gdy $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ jest dowolną czwórką kolejnych liczb naturalnych nieparzystych, wówczas czwórka $(a,b,c,d) = (F_\alpha, F_\beta, F_\gamma, F_\delta)$ jest dobra; jak zwykle, F_n oznacza n-tą liczbę Fibonacciego ($F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 2$).

Uzasadnienie: Dopełniamy taką czwórkę trzema kolejnymi liczbami parzystymi k, l, m do pełnego bloku siedmiu kolejnych liczb naturalnych $(\alpha, k, \beta, l, \gamma, m, \delta)$ i korzystamy ze znanych tożsamości

$$F_n^2 + 1 = \begin{cases} F_{n-1}F_{n+1} & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ F_{n-2}F_{n+2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$ab = F_\alpha F_\beta = F_k^2 + 1, \qquad bc = F_\beta F_\gamma = F_l^2 + 1,$$
$$cd = F_\gamma F_\delta = F_m^2 + 1, \qquad ac = F_\alpha F_\gamma = F_\beta^2 + 1,$$
$$bd = F_\beta F_\delta = F_\gamma^2 + 1.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 783 ($WT = 3{,}76$) i 784 ($WT = 1{,}18$) z numeru 6/2019

Janusz Olszewski	Warszawa	45,91
Paweł Kubit	Kraków	44,25
Krzysztof Kamiński	Pabianice	42,48
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Michał Koźlik	Gliwice	35,73
Janusz Fiett	Warszawa	33,09
Mikołaj Pater	Opole	31,50

Dwaj uczestnicy przekraczają próg 44p., i to dalece nie pierwszy raz – tu chodzą duże liczby: pan Kubit – po raz siódmy! pan Olszewski – po raz dwudziesty!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.