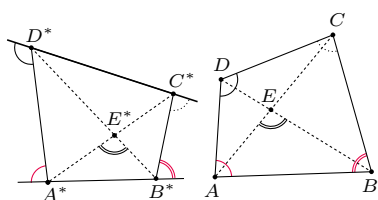


# Czworokąty bliźniacze

Stanisław HAUKE\*

\* zdobywca złotego medalu  
w XL Konkursie Uczniowskich Prac  
z Matematyki im. Pawła Domańskiego



Rys. 1

Przypuśćmy, że dane mamy dwa czworokąty wypukłe  $ABCD$  i  $A^*B^*C^*D^*$  takie, że każdemu bokowi jednego odpowiada pewien równoległy doń bok drugiego, a każdej przekątnej – równoległa przekątna. Na pierwszy rzut oka wydawać by się mogło, że takie czworokąty muszą być podobne, jest jednak druga możliwość – wówczas czworokąty te są *bliźniacze*. Dokładna definicja tego określenia jest następująca: czworokąty wypukłe  $ABCD$  i  $A^*B^*C^*D^*$  nazwiemy bliźniaczymi, jeśli spełnione są dwa warunki:

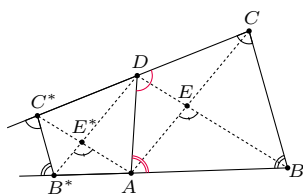
$$\sphericalangle A + \sphericalangle A^* = \sphericalangle B + \sphericalangle B^* = \sphericalangle C + \sphericalangle C^* = \sphericalangle D + \sphericalangle D^* = 180^\circ$$

oraz

$$\sphericalangle A^*E^*B^* = \sphericalangle AEB,$$

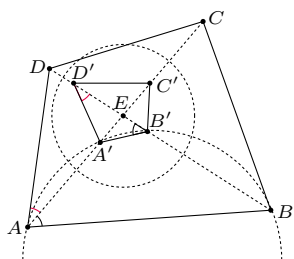
gdzie punkty  $E$  i  $E^*$  są odpowiednio przecięciami prostych  $AC$  i  $BD$  oraz  $A^*C^*$  i  $B^*D^*$  (rys. 1). Wówczas będziemy pisać  $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$ . Taka definicja par czworokątów bliźniaczych jest „porządna”, to znaczy: dla każdego czworokąta wypukłego  $W$  istnieje dokładnie jeden, z dokładnością do podobieństwa, czworokąt do niego bliźniaczy  $W^*$ . Dodatkowo czworokąt bliźniaczy do czworokąta  $W^*$  to po prostu czworokąt  $W$ .

Spójrzmy na dwie konstrukcje czworokąta bliźniaczego dla danego czworokąta  $ABCD$ .



Rys. 2

**Konstrukcja 1.** Niech  $B^*$  będzie punktem przecięcia prostej  $AB$  i prostej równoległej do prostej  $AC$ , przechodzącej przez punkt  $D$ , zaś  $C^*$  niech będzie punktem przecięcia prostej  $CD$  i prostej równoległej do prostej  $BD$ , przechodzącej przez punkt  $A$  (rys. 2). Wówczas  $AB^*C^*D \approx ABCD$ .



Rys. 3

**Konstrukcja 2.** Rozważmy inwersję o środku w punkcie przecięcia przekątnych  $AC$  i  $BD$ . Niech obrazami punktów  $A, B, C, D$  w tej inwersji będą odpowiednio punkty  $A^*, B^*, C^*, D^*$  (rys. 3). Wówczas  $A^*B^*C^*D^* \approx ABCD$ .

Sprawdzenie, wprost z definicji, że powyższe pary czworokątów są istotnie bliźniacze, pozostawiamy Czytelnikowi.

W geometrii rozważane są przeróżne układy współrzędnych. Układ współrzędnych kartezjańskich, przypisanie punktom płaszczyzny liczb zespolonych, ale też układy odniesienia względem trójkąta: współrzędne barycentryczne czy tryliniowe (wyrażające stosunki odległości punktu od boków ustalonego trójkąta). My będziemy rozważać jeszcze inny układ współrzędnych, w odniesieniu do czworokąta. Niech dany będzie czworokąt  $ABCD$  oraz punkt  $P$ , wtedy *współzrędnymi kątowymi punktu  $P$  względem czworokąta  $ABCD$*  nazwiemy czwórkę:

$$wk(P, ABCD) = (\sphericalangle APB, \sphericalangle BPC, \sphericalangle CPD, \sphericalangle DPA).$$

Okazuje się, że tak zdefiniowane współrzędne kątowe mają wiele wspólnego z czworokątami bliźniaczymi. Dokładniej mówi o tym następujące twierdzenie.

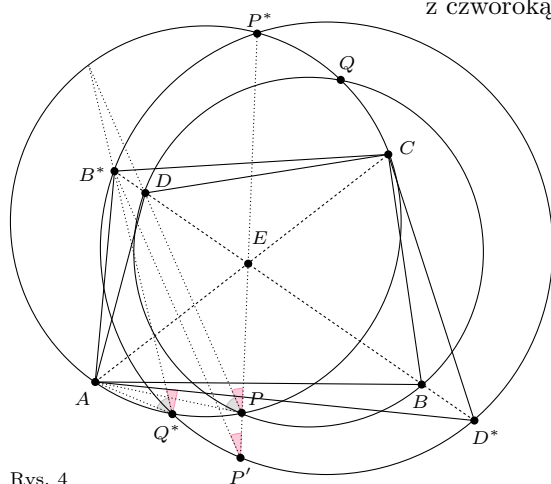
**Twierdzenie 1.** Jeśli  $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$ , to dla każdego punktu  $P$  istnieje taki punkt  $P^\circ$ , że  $wk(P, ABCD) = wk(P^\circ, C^*D^*A^*B^*)$ .

**Dowód.** Rozważmy antyinwersję  $AI_E^t$ , gdzie  $t = AE \cdot CE$ . Łatwo zauważyć, że  $AI_E^t(C) = A$  oraz  $AI_E^t(A) = C$ . Oznaczmy  $AI_E^t(B) = B^*$ ,  $AI_E^t(D) = D^*$  oraz  $AI_E^t(P) = P^*$  (rys. 4). Na mocy prawdziwości Konstrukcji 2 czworokąty  $ABCD$  i  $CB^*AD^*$  są bliźniacze. Niech  $\omega_1$  i  $\omega_2$  będą odpowiednio okręgami opisanymi na trójkątach  $\triangle ACP$  i  $\triangle BDP$ , niech punkt  $Q$  będzie drugim przecięciem okręgów  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Wykażę, że szukanym punktem  $P^\circ$  jest punkt  $AI_E^t(Q) = Q^*$ .

Wystarczy uzasadnić, że

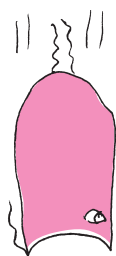
$$(1) \quad \sphericalangle DPA = \sphericalangle B^*Q^*A,$$

Antyinwersja  $AI_E^t$  to złożenie inwersji  $I_E^t$  z symetrią środkową względem punktu  $E$ .



Rys. 4

By uniknąć rozważania niepotrzebnych przypadków, posługujemy się kątami skierowanymi. Kątem skierowanym między prostą  $k$  i  $l$  nazywamy taką liczbę  $\alpha$  z przedziału  $[0^\circ, 180^\circ)$ , że po obroceniu prostej  $k$  przeciwnie do ruchu wskazówek zegara o kąt  $\alpha$  proste  $k'$  i  $l$  będą równoległe. Dla kątów skierowanych zachodzi następująca własność: *kąt skierowany między prostą  $k$  i  $l$  jest równy kątowi skierowanemu między prostą  $k'$  i  $l'$  i różny od  $0^\circ$  wtedy i tylko wtedy, gdy punkty  $k \cap l, k' \cap l', k \cap k', l \cap l'$  leżą na jednym okręgu. Będę ją nazywał **Własnością 1**.*



gdyż pozostałe do sprawdzenia równości są analogiczne. Ponieważ  $PE \cdot EP^* = QE \cdot EQ^* = AE \cdot EC$ , więc punkty  $P^*$  i  $Q^*$  leżą na okręgu  $\omega_1$ .

Na mocy Własności 1 (patrz margines) wystarczy zatem wykazać, że proste  $Q^*B^*$  i  $PD$  przecinają się na okręgu  $\omega_1$ . To zaś, ponownie na mocy Własności 1, jest równoważne równości

$$(2) \quad \sphericalangle P^*PD = \sphericalangle P^*Q^*B^*.$$

Niech  $P'$  będzie drugim przecięciem prostej  $P^*P$  z okręgiem  $\omega_3 = AI_E^t(\omega_2)$ .

Ponieważ okrąg  $\omega_3$  przechodzi na okrąg  $\omega_2$  w pewnej jednokładności o środku w  $E$  (co wynika z definicji inwersji), więc proste  $DP$  i  $B^*P'$  są równoległe, stąd

$$(3) \quad \sphericalangle P^*PD = \sphericalangle P^*P'B^*.$$

Ponieważ punkty  $P^*, P', Q^*$  i  $B^*$  leżą na jednym okręgu, to na mocy Własności 1 zachodzi

$$(4) \quad \sphericalangle P^*P'B^* = \sphericalangle P^*Q^*B^*.$$

Równości (3) i (4) implikują (2), więc również (1), co kończy dowód.  $\square$

W dowodzeniu kolejnych twierdzeń przyda nam się następujące stwierdzenie, które jest w pewnym sensie odwróceniem Twierdzenia 1. Jego dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

**Stwierdzenie.** Jeśli kąty w odpowiadających wierzchołkach czworokątów  $ABCD$  i  $A^*B^*C^*D^*$  sumują się do  $180$  stopni oraz istnieją takie punkty  $P$  i  $P^\circ$ , że  $wk(P, ABCD) = wk(P^\circ, C^*D^*A^*B^*)$ , to czworokąty te są bliźniacze.

Wyposażeni w przedstawione narzędzia możemy udowodnić poniższe Twierdzenia 2 i 3. Czytelnika Dociekliwego zachęcamy do samodzielnego zmierzenia się z tymi twierdzeniami przed przeczytaniem zamieszczonych dowodów. Można spróbować uzasadnić je bez powoływania się na Twierdzenie 1 (takie dowody są przedstawione w pełnej wersji mojej pracy *Czworokąty bliźniacze* dostępnej na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)).

**Twierdzenie 2.** Jeśli  $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$  oraz w czworokąt  $ABCD$  da się wpisać okrąg, to w czworokąt  $A^*B^*C^*D^*$  też da się wpisać okrąg.

**Dowód.** Na półprostych  $B^*C^*$  i  $A^*D^*$  wybierzmy punkty  $C_1^*$  i  $D_1^*$  tak, że odcinki  $C^*D^*$  i  $C_1^*D_1^*$  są równoległe oraz w czworokąt  $A^*B^*C_1^*D_1^*$  można wpisać okrąg. Wystarczy udowodnić, że  $C_1^* = C^*$  i  $D_1^* = D^*$ .

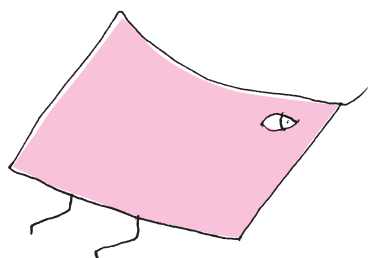
Niech  $I$  i  $I^*$  będą środkami okręgów wpisanych w  $ABCD$  i  $A^*B^*C_1^*D_1^*$ . Zauważmy, że

$$\sphericalangle AIB = 180^\circ - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}$$

oraz

$$\sphericalangle C_1^*I^*D_1^* = 180^\circ - \frac{C_1^*}{2} - \frac{D_1^*}{2} = 180^\circ - \frac{C^*}{2} - \frac{D^*}{2} = \frac{C}{2} + \frac{D}{2},$$

zatem ponieważ  $A + B + C + D = 360^\circ$ , to  $\sphericalangle AIB = \sphericalangle C_1^*I^*D_1^*$ . W tej sytuacji punkty  $I$  i  $I^*$  mają takie same pierwsze współrzędne katowe odpowiednio względem czworokątów  $ABCD$  i  $C_1^*D_1^*A^*B^*$ . Analogicznie możemy dowieść, że pozostałe trzy współrzędne też są takie same, zatem  $wk(I, ABCD) = wk(I^*, C_1^*D_1^*A^*B^*)$ , skąd na mocy Stwierdzenia wnioskujemy, że  $ABCD \approx A^*B^*C_1^*D_1^*$ . Zgodnie z założeniami mamy  $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$ , zatem czworokąty  $A^*B^*C^*D^*$  i  $A^*B^*C_1^*D_1^*$  są podobne, skąd łatwo wywnioskować, że  $C_1^* = C^*$  i  $D_1^* = D^*$ , a to kończy dowód.  $\square$



**Twierdzenie 3.** Jeśli  $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$  oraz proste  $AC^*$ ,  $CA^*$  i  $BD^*$  są współpękowe, to przez ich punkt przecięcia przechodzi prosta  $DB^*$ .

**Dowód.** Niech punkt  $P$  będzie przecięciem wyżej wymienionych trzech prostych. Załóżmy ponadto, że  $P$  nie leży na okręgu opisanym na trójkącie  $A^*C^*D^*$  (dowód w przeciwnym przypadku jest raczej techniczny i mniej ciekawy).

Rozważmy taki punkt  $P^\circ$ , by

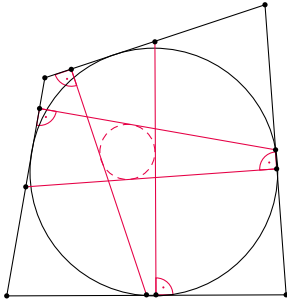
$$(5) \quad wk(P, ABCD) = wk(P^\circ, C^*D^*A^*B^*)$$

(istnienie takiego punktu gwarantuje nam Twierdzenie 1). Ponieważ proste

$AC^*, CA^*$  i  $BD^*$  są współpękowe, to zachodzą równości kątów

$$\sphericalangle C^*P^\circ D^* = \sphericalangle APB = \sphericalangle C^*PD^* \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle A^*P^\circ C^* = \sphericalangle CPA = \sphericalangle A^*PC^*,$$

one zaś implikują, że czworokąty  $PD^*C^*P^\circ$  i  $PC^*A^*P^\circ$  są wpisane w okręgi. Ponieważ czworokąt  $PD^*C^*A^*$  nie jest wpisany w okrąg, więc  $P^\circ = P$  lub  $P^\circ = C^*$ . W analogiczny sposób możemy jednak udowodnić, że  $P^\circ = P$  lub  $P^\circ = A^*$  (role punktów  $A^*$  i  $C^*$  są symetryczne), zatem musi być  $P^\circ = P$ . Z (5) wynika zatem, że  $\sphericalangle A^*PB^* = \sphericalangle CPD$ , z tego zaś mamy, że punkty  $D, P$  i  $B^*$  są współliniowe, więc teza zachodzi.  $\square$

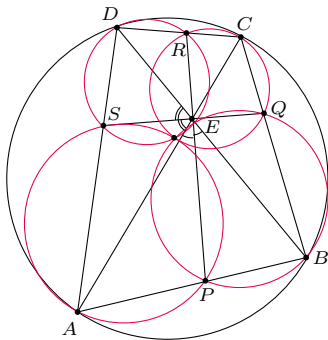


Rys. 5

Na zakończenie pozostawiamy dla Czytelnika dwa zadania, które da się rozwiązać, wykorzystując czworokąty bliźniacze – rozwiązania te można znaleźć w pełnej wersji mojej pracy zgłoszonej na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego. Pierwsze z nich zostało przedstawione na stronie [www.gogeometry.com](http://www.gogeometry.com) jako problem 1351, bez znanego geometrycznego dowodu; to właśnie ono było dla mnie motywacją do napisania pracy. Drugie zadanie jest zadaniem autorskim, powstałym w trakcie badania czworokątów bliźniaczych.

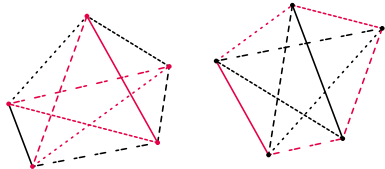
**Zadanie 1.** W czworokąt wypukły  $ABCD$  można wpisać okrąg. Przez środek każdego z odcinków  $AB, BC, CD, DA$  poprowadzono proste prostopadłe do przeciwległych boków czworokąta  $ABCD$ . Proste te ograniczają obszar będący czworokątem wypukłym. Wykazać, że w ten czworokąt również można wpisać okrąg (rys. 5).

**Zadanie 2.** Na czworokącie  $ABCD$  można opisać okrąg. Niech  $E$  będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta. Załóżmy, że dwusieczna kąta  $AEB$  przecina prostą  $AB$  w punkcie  $P$ , zaś prostą  $DC$  w punkcie  $R$ ; niech ponadto dwusieczna kąta  $BEC$  przecina prostą  $BC$  w punkcie  $Q$ , zaś prostą  $AD$  w punkcie  $S$ . Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach  $\triangle PBQ, \triangle QCR, \triangle RDS, \triangle SAP$  mają punkt wspólny (rys. 6).



Rys. 6

*Uwaga końcowa.* Jak już nadmienilem we wstępie, czworokąty bliźniacze na płaszczyźnie da się narysować w taki sposób, by ich odpowiadające boki i przekątne były równoległe. Można się zastanowić, czy istnieją inne pary  $n$ -kątów o tej własności, że da się je narysować w taki sposób, by ich odpowiadające sobie boki i przekątne były do siebie równoległe oraz by  $n$ -kąty te nie były do siebie podobne. Dla  $n = 3$  oczywiście taka para nie istnieje, z kolei przykład dla  $n = 5$  przedstawiony jest na marginesie. Potrafię udowodnić, że takich par jest stosunkowo mało, w szczególności nie dla każdego  $n$ -kąta istnieje tak zdefiniowany  $n$ -kąt bliźniaczy. Zachęcam Czytelnika do próby znalezienia odpowiedzi na to pytanie!



Rys. 7

## Odpowiedzi do artykułu Mały Gauss

**FI.** Załóżmy, że w sprawdzanej pracy Bolka mamy  $x_{11} = g, x_{12} = h$ . Jeśli dalej obliczał prawidłowo (przynajmniej do miejsca  $x_{17}$ ), to uzyskał następujące wartości:

$$\begin{aligned} x_{13} &= g + h, \\ x_{14} &= g + 2h, \\ x_{15} &= 2g + 3h, \\ x_{16} &= 3g + 5h, \\ x_{17} &= 5g + 8h. \end{aligned}$$

Fibonacci oblicza:

$$\begin{aligned} x_{11} - 8x_{15} + 3x_{17} &= \\ &= g - 8(2g + 3h) + 3(5g + 8h) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

**FII.** Jeśli Lolek prawidłowo wykonał swoje rachunki, to zachodzą:

$$(1) \quad \begin{cases} x_2c + x_1d = x_3 \\ x_3c + x_2d = x_4 \end{cases}$$

oraz

$$(2) \quad x_4c + x_3d = x_5.$$

Rozwiązując (dowolną metodą) układ równań (1) z niewiadomymi  $c, d$ , otrzymamy

$$c = \frac{x_2x_3 - x_1x_4}{x_2^2 - x_1x_3}, \quad d = \frac{x_2x_4 - x_3^2}{x_2^2 - x_1x_3},$$

co po podstawieniu do wzoru (2) daje następującą „tożsamość weryfikującą”:

$$x_5 = x_4 \cdot \frac{x_2x_3 - x_1x_4}{x_2^2 - x_1x_3} + x_3 \cdot \frac{x_2x_4 - x_3^2}{x_2^2 - x_1x_3}.$$

Jako wielomian weryfikujący  $F_2$  można więc przyjąć

$$\begin{aligned} F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \\ &= x_3^3 + x_1x_4^2 + x_5x_2^2 - 2x_2x_3x_4 - x_1x_3x_5. \end{aligned}$$