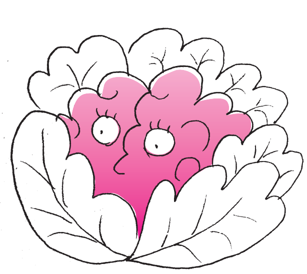
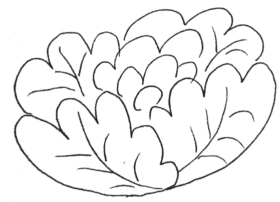
Nie brakuje jednak wybitnych badaczy, których poglądy na matematyczny świat i hipotezę continuum są zbliżone do idei wieloświata matematycznego. Izraelski matematyk, autor niejednego przełomowego odkrycia matematycznego, Saharon Shelah, napisał w artykule „Logical Dreams” z 2003 roku: „Niektórzy uważają, że przekonujące dodatkowe aksjomaty teorii mnogości, które rozstrzygają problemy o dużym znaczeniu, zostaną znalezione lub nawet już zostały znalezione. Trudno dyskutować z tą nadzieją oraz trudno rozważać argumenty, które nie zostały jeszcze zasugerowane. Nie zgadzam się jednak z czystym platońskim poglądem, że interesujące problemy w teorii mnogości można rozstrzygnąć, musimy tylko odkryć dodatkowy aksjomat. Moje wyobrażenie jest takie, że mamy wiele możliwych teorii mnogości, wszystkie zgodne z aksjomatami ZFC” (z podstawowymi aksjomatami teorii mnogości).

Zostawmy ten problem w tym miejscu. Każdy Czytelnik ma prawo do swoich wyobrażeń co do wynikającego z powyższych rozważań obrazu matematyki. Faktem jest, że powszechnie przyjęte aksjomaty nie rozstrzygają, czy istnieją jakieś „nieskończoności” pomiędzy nieskończonością przeliczalną a tą mocy continuum. Możemy jednak z łatwością konstruować nieskończenie wiele (bardzo nieskończenie wiele!) jeszcze większych nieskończoności. Tym zajmiemy się w kolejnym, ostatnim, odcinku naszych przygód z nieskończonością.





Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1621. Na tablicy początkowo napisana została liczba 1. Jeśli na tablicy napisana jest co najmniej jedna z liczb n, $2n$, $3n+1$, to można dopisać każdą z pozostałych. Rozstrzygnąć, czy każda dodatnia liczba całkowita może w pewnym momencie pojawić się na tablicy.
Rozwiązanie na str. 16

M 1622. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkty P i Q leżące odpowiednio wewnątrz trójkątów ABC i ADC mają tę własność, że $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle PCQ = 45°$. Wykazać, że $BP^2 + DQ^2 = PQ^2$.
Rozwiązanie na str. 19

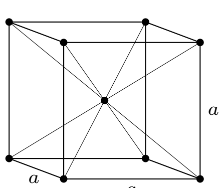
M 1623. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkty P i Q leżące odpowiednio wewnątrz trójkątów ABC i ADC mają tę własność, że $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle PCQ = 45°$. Wykazać, że

$$[ABP] + [ADQ] + [CPQ] = [CDQ] + [BCP] + [APQ],$$

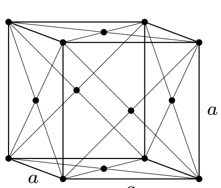
gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.
Rozwiązanie na str. 19

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 989. Oszacuj liczbę atomów, z których składa się Ziemia. Promień Ziemi $R \approx 6400$ km, masa Ziemi $M \approx 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, jednostka masy atomowej (1/12 masy atomu ^{12}C) $u \approx 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg. Pozostałe informacje znajdź, analizując dane przytaczane w układzie okresowym pierwiastków.
Rozwiązanie na str. 5



Rys. 1



Rys. 2

F 990. W temperaturze 910°C żelazo podlega przemianie fazowej, w której zmienia się sposób uporządkowania jego atomów. W niskich temperaturach atomy kryształu żelaza obsadzają węzły sieci regularnej, centrowanej przestrzennie (rysunek 1 przedstawia komórkę elementarną takiej sieci, zwanej siecią bcc). Powyżej 910°C atomy obsadzają węzły sieci regularnej centrowanej powierzchniowo (rysunek 2 przedstawia jej komórkę elementarną – sieć fcc). Badając dyfrakcję promieni X na krysztale, można nie tylko ustalić rodzaj struktury, ale także rozmiar komórki elementarnej. Dla sieci bcc długość boku komórki wynosi $a_B = 2{,}9044 \cdot 10^{-10}$, a dla fcc $a_F = 3{,}6467 \cdot 10^{-10}$ (obie długości mierzone w temperaturze 910°C). Jak podczas przemiany zmienia się odległość między najbliższymi atomami sieci? Jak zmienia się gęstość żelaza?
Rozwiązanie na str. 5