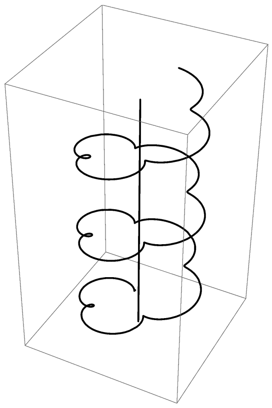


Rys. 4. Przykładowe rozwiązanie równania dewiacji geodezyjnych. Jedna cząstka porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż osi wiązki. Druga cząstka krąży wokół tej osi. Warunki początkowe są tak dobrane, że ruch jest dokładnie okresowy

wiązek Bessela, które zostały nazwane *grawitacyjnymi wiązkami Bessela*. Wiązka taka w pewnym otoczeniu osi wirowej ma również podobne własności, jak fala grawitacyjna emitowana przez układ podwójny w otoczeniu osi przechodzącej przez środek masy i prostopadłej do płaszczyzny orbitalnej układu (w pewnym zakresie odległości). W odróżnieniu jednak od fali emitowanej przez układ podwójny wiązka Bessela ma znacznie prostszy opis matematyczny, pozwalający na ścisłe analityczne rozwiązanie równania dewiacji geodezyjnej.

W czasoprzestrzeni opisywanej przez pewną konkretną wiązkę Bessela oś wirowa fali jest geodezyjną, czyli cząstka swobodna może poruszać się dokładnie po tej osi, z dowolną stałą prędkością. Rozwiązując równanie dewiacji geodezyjnej wokół tej geodezyjnej, możemy zobaczyć, jak będą poruszać się cząstki w jej otoczeniu. Analityczne rozwiązania tego równania przedstawione są na rysunku 3. Widać, że trajektorie cząstek oscylują wokół osi wirowej fali, cząstki pozostają więc „złapane” w jej otoczeniu – nawet jak się oddalają, to potem zawracają. Można w dodatku tak dobrać warunki początkowe, żeby dostać ruch dokładnie okresowy, jak na rysunku 4.

Czy to ma jakieś zastosowanie praktyczne?

Poprzedni numer *Delty* był w całości poświęcony przykładom nieoczekiwanych zastosowań praktycznych wyników abstrakcyjnych badań podstawowych. Wyniki tutaj referowane są na razie czysto teoretyczne. Taka matematyczna ciekawostka. Nie wiadomo nawet, czy zjawisko to da się zaobserwować w jakimś eksperymencie, ani czy występuje ono w jakichś procesach astrofizycznych. Na razie można tylko spekulować. Może ma jakieś znaczenie w tworzeniu galaktycznych dżetów, czyli strumieni materii wyrzucanych prostopadle do dysku aktywnej galaktyki, wzdłuż osi jej obrotu? Na razie ciągle zbyt mało wiemy o tym efekcie, ale badania trwają.

Średnie w zawodach studenckich

Bartosz BIEGANOWSKI, Aurelia DYMEK*, Daniel STRZELECKI**

* doktoranci, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Autorzy brali udział w takich zajęciach – prowadzonych przez doktora Roberta Skibę na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu, oraz startowali m. in. w zawodach Vojtěch Jarník International Mathematical Competition w Ostrawie (Czechy), International Mathematical Competition for Students w Błagojewgradzie (Bułgaria) oraz North Countries Universities Mathematical Competition w Sankt Petersburgu (Rosja) Challenges.

Czytelnicy *Delty* zapewne znają zawody matematyczne dla uczniów, takie jak Olimpiada Matematyczna lub Kangur Matematyczny. Nie wszyscy wiedzą jednak, że konkursowe zmagania można kontynuować również podczas studiów. Na niektórych uczelniach odbywają się nawet specjalne zajęcia, podczas których rozwiązuje się i omawia zadania konkursowe.

Przyjrzyjmy się bliżej często używanemu podczas zawodów studenckich twierdzeniu o wartości średniej, przypisywanemu Lagrange'owi. Stwierdza ono, że dla funkcji ciągłej $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ i różniczkowalnej w przedziale (a,b) istnieje punkt c w przedziale (a,b) taki, że

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Inaczej mówiąc, przyrost wartości funkcji wyraża się przez przyrost wartości zmiennej i pochodną funkcji w pewnym punkcie pośrednim.

Równie przydatne jest uogólnienie powyższego twierdzenia, znane jako twierdzenie Cauchy'ego. Mianowicie, dla funkcji ciągłych $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ i różniczkowalnych w przedziale (a,b) istnieje punkt c w przedziale (a,b) taki, że

$$g'(c)(f(b)-f(a)) = f'(c)(g(b)-g(a)).$$

Zauważmy, że biorąc w twierdzeniu Cauchy'ego funkcję $g(x) = x$ dla każdego x, uzyskujemy twierdzenie Lagrange'a.

Okazuje się, że z twierdzenia Lagrange'a można wyprowadzić twierdzenie Cauchy'ego. Zachęcamy Czytelnika do próby przeprowadzenia tego rozumowania.

Jesteśmy gotowi, aby zastosować powyższe twierdzenia do rozwiązywania zadań z międzynarodowych zawodów dla studentów. Rozważmy różniczkowalną funkcję $f\colon [0,1] \to [0,1]$ taką, że $|f'(x)| \neq 1$ dla wszystkich x z przedziału $[0,1]$.

Udowodnimy, że równości $f(\alpha) = \alpha$ i $f(\beta) = 1 - \beta$ są spełnione dla co najwyżej jednej pary liczb α i β z przedziału $[0, 1]$. Założywszy, że $f(\alpha) = \alpha$ i $f(\alpha') = \alpha'$ dla $0 \leqslant \alpha < \alpha' \leqslant 1$, z twierdzenia Lagrange'a otrzymujemy, że istnieje $c \in (\alpha, \alpha')$ takie, że

$$\alpha' - \alpha = f(\alpha') - f(\alpha) = f'(c)(\alpha' - \alpha),$$

więc $f'(c) = 1$, ale to jest sprzeczne z założeniem $|f'(x)| \neq 1$ dla $x \in [0, 1]$. Podobnie wykluczamy istnienie dwóch elementów β o własności $f(\beta) = 1 - \beta$. Dowód pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie, Ambitnemu Czytelnikowi proponujemy pokazanie istnienia pary punktów α i β o powyższych własnościach. W ten sposób zostanie uzyskane rozwiązanie zadania 1. w kategorii I z 22. Zawodów im. Vojtěcha Jarníka.

Okazuje się, że twierdzenie o wartości średniej może zostać zastosowane także do rozwiązywania równań. Rozważmy następujące równanie:

$$17^x + 2^x = 11^x + 2^{3x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie tego równania zostało postawione jako problem 1. w kategorii II podczas 28. Zawodów V. Jarníka.

Rozwiązanie rozpoczniemy od prostej obserwacji, że liczba $x = 0$ jest rozwiązaniem powyższego równania. Przyjmijmy zatem, że $x \neq 0$ również jest rozwiązaniem. Równanie możemy przepisać w następujący sposób:

$$(*) \qquad 17^x - 11^x = 8^x - 2^x.$$

Niech $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $f(t) = t^x$. Funkcja ta spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a na odcinku $[2, 8]$. Zatem istnieje taka liczba $t_1 \in (2, 8)$, że

$$(8 - 2)f'(t_1) = f(8) - f(2) = 8^x - 2^x.$$

Funkcja ta spełnia również założenia tegoż twierdzenia na odcinku $[11, 17]$, więc istnieje liczba $t_2 \in (11, 17)$ spełniająca zależność

$$(17 - 11)f'(t_2) = f(17) - f(11) = 17^x - 11^x.$$

Zauważmy, że $t_1 < t_2$. Podstawiając otrzymane zależności (przypomnijmy, że x jest rozwiązaniem) do równania $(*)$, dostajemy równość

$$6f'(t_1) = 6f'(t_2),$$

którą możemy przepisać równoważnie jako

$$6xt_1^{x-1} = 6xt_2^{x-1}.$$

Ponieważ $x \neq 0$, to $t_1^{x-1} = t_2^{x-1}$ i w konsekwencji

$$\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{x-1} = 1.$$

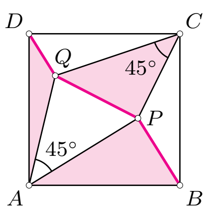
Skoro $0 < t_1 < t_2$, to $x = 1$. Łatwo sprawdzić, że $x = 1$ jest również rozwiązaniem równania. Zatem jedynymi rozwiązaniami są $x = 0$ oraz $x = 1$.

Rozwiązanie zadania M 1622.
Skoro $AB = AD$ oraz $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle BAP + \sphericalangle DAQ$, to istnieje punkt jednocześnie symetryczny do B względem AP i do D względem AQ; nazwijmy go M. Trójkąt PQM ma boki o długościach BP, DQ, PQ, a jego kąt wewnętrzny przy wierzchołku M ma miarę $\sphericalangle ABP + \sphericalangle ADQ$.

Podobnie istnieje punkt N, jednocześnie symetryczny do B względem CP oraz do D względem CQ. Trójkąt PQN jest przystający do trójkąta PQM, a kąt wewnętrzny przy wierzchołku N ma miarę $\sphericalangle CBP + \sphericalangle CDQ$. Pozostaje zauważyć, że

$$\sphericalangle PMQ + \sphericalangle PNQ = \\ = \sphericalangle ABP + \sphericalangle ADQ + \sphericalangle CBP + \sphericalangle CDQ = \\ = 180^\circ,$$

skąd $\sphericalangle PMQ = \sphericalangle PNQ = 90^\circ$. Teza zadania wynika więc z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do dowolnego z tych dwóch trójkątów.



Rozwiązanie zadania M 1623.
Skoro $AB = AD$ oraz $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle BAP + \sphericalangle DAQ$, to istnieje punkt jednocześnie symetryczny do B względem AP i do D względem AQ; nazwijmy go M. Skoro $[ABP] = [AMP]$ oraz $[ADQ] = [AMQ]$, to lewa strona dowodzonej równości przybiera postać $[APCQ] + [PQM]$.

Podobnie istnieje punkt N, jednocześnie symetryczny do B względem CP oraz do D względem CQ i podobnie prawą stronę dowodzonej równości można przepisać jako $[APCQ] + [PQN]$. Do zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że trójkąty PQM oraz PQN są przystające (cecha bok–bok–bok).

Twierdzenie o wartości średniej może także przynieść zaskakująco proste rozwiązanie zadania, które początkowo zdaje się wymagać zupełnie innych metod. Wykażemy, że jeśli

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{i+1} a_i = 0,$$

to wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ma dodatni pierwiastek rzeczywisty. To zadanie nie pochodzi wprawdzie bezpośrednio z zawodów matematycznych, ale jest motywowane zadaniem 2.10.1. z bardzo dobrego zbioru zadań: T. Andreescu, R. Gelca, *Mathematical Olympiad Challenges*.

Kiedy już wiemy, że chcemy wykorzystać twierdzenie o wartości średniej, to nie pozostaje nic innego, jak znaleźć odpowiednią funkcję. Chcemy udowodnić istnienie punktu, w którym zeruje się dany wielomian, dlatego pierwszym słusznym pomysłem jest rozważenie funkcji

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1},$$

której pochodną jest właśnie $w(x)$. Pozostaje zauważyć, że

$$f(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad f(2) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{i+1} a_i\right) = 0.$$

Zatem na mocy twierdzenia Rolle'a, które jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Lagrange'a dla $f(a) = f(b)$, wnioskujemy istnienie punktu $x_0 \in (0, 2)$ takiego, że $w(x_0) = 0$.

Mamy nadzieję, że przekonaliśmy Czytelnika do tego, że twierdzenia o wartości średniej mogą być bardzo użyteczne podczas rozwiązywania zadań w trakcie międzynarodowych zawodów matematycznych – i nie tylko...