Twierdzenie MRDP. *Podzbiór zbioru liczb naturalnych jest częściowo rozstrzygalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem diofantycznym.*

Uwzględniając fakt istnienia częściowo rozstrzygalnych, ale nierozstrzygalnych podzbiorów zbioru liczb naturalnych, twierdzenie MRDP implikuje istnienie nierozstrzygalnych zbiorów diofantycznych i w konsekwencji negatywne rozwiązanie dziesiątego problemu Hilberta. Zanim jednak prześledzimy dokładniej tę ostatnią implikację, przyjrzyjmy się, jak zaskakująca jest w istocie treść twierdzenia MRDP.

Wspomniany powyżej problem pierwszości jest z pewnością rozstrzygalny: dla danej na wejściu liczby naturalnej n trywialny algorytm sprawdza po kolei, czy n jest podzielne przez jakąkolwiek liczbę ze zbioru $\{2, \ldots, n-1\}$. W szczególności, zbiór liczb pierwszych jest częściowo rozstrzygalny. Z twierdzenia MRDP wynika zatem, że istnieje równanie diofantyczne z parametrem $P(a, x_1, \ldots, x_k) = 0$, które ma rozwiązanie w liczbach naturalnych wtedy i tylko wtedy, gdy a jest liczbą pierwszą! Podobnie ma się sprawa ze zbiorem wszystkich potęg liczby 2, zbiorem liczb Fibonacciego... i przypuszczalnie z każdym innym podzbiorem zbioru liczb naturalnych, którego definicja przychodzi nam łatwo do głowy.

Zdefiniowanie zbioru, który nie jest częściowo rozstrzygalny, jest zadaniem zdecydowanie nietrywialnym.

Pozostaje nam przyjrzeć się, w jaki sposób z twierdzenia MRDP wynika negatywne rozwiązanie dziesiątego problemu Hilberta. Przypuśćmy, że odpowiedź ta byłaby pozytywna, i niech $\mathcal{A}$ oznacza algorytm, który dla dowolnego równania diofantycznego rozstrzyga, czy ma ono rozwiązanie w liczbach naturalnych, czy też nie. Rozważmy równanie diofantyczne z parametrem $P(a, x_1, \ldots, x_k) = 0$ definiujące pewien zbiór diofantyczny X. Zauważmy, że następujący algorytm rozstrzyga przynależność do zbioru X: dla danej na wejściu liczby naturalnej n oblicz równanie diofantyczne $P_n(x_1, \ldots, x_k) = 0$, a następnie za pomocą algorytmu $\mathcal{A}$ rozstrzygnij, czy ma ono rozwiązanie w zbiorze liczb naturalnych. Odpowiedź pozytywna oznacza, że $n \in X$, natomiast odpowiedź negatywna oznacza, że $n \notin X$. Wykazaliśmy w ten sposób, że każdy zbiór diofantyczny jest rozstrzygalny. Na mocy twierdzenia MRDP oznacza to, że każdy częściowo rozstrzygalny podzbiór zbioru liczb naturalnych jest rozstrzygalny. Otrzymana sprzeczność implikuje nierozstrzygalność dziesiątego problemu Hilberta.

Jak uniknąć częściowej rozstrzygalności?

W artykule powyżej wspomniano, że prawie każdy zbiór liczb naturalnych, który przyjdzie nam na myśl, jest częściowo rozstrzygalny. Spróbujmy jednak pokazać, że słowo *prawie* jest tu istotne, czyli że możliwa jest konstrukcja zbioru $S \subseteq \mathbb{N}$, który nie jest częściowo rozstrzygalny.

Po pierwsze zauważmy, że jeśli zarówno zbiór S, jak i jego dopełnienie $\mathbb{N} \setminus S$ są częściowo rozstrzygalne, to wówczas S jest nawet rozstrzygalny. To, że S jest częściowo rozstrzygalny, oznacza, że istnieje algorytm (nazwijmy go *pozytywnym*), który dla danej liczby $n \in \mathbb{N}$ zatrzyma się i odpowie „n należy do S", jeśli $n \in S$ (ale być może nie zatrzyma się, jeśli $n \notin S$). Podobnie, skoro $\mathbb{N} \setminus S$ jest częściowo rozstrzygalny, to istnieje algorytm (nazwijmy go *negatywnym*), który dla danej liczby $n \in \mathbb{N}$ zatrzyma się i odpowie „n należy do $\mathbb{N} \setminus S$", o ile $n \in \mathbb{N} \setminus S$. A zatem jeśli puścimy naraz oba algorytmy, pozytywny i negatywny, to któryś z nich się zatrzyma i zwróci poprawną odpowiedź (zakładamy, że wtedy automatycznie zatrzymujemy również drugi algorytm). To pokazuje, że istotnie w takiej sytuacji S jest rozstrzygalny.

A zatem do konstrukcji zbioru, który nie jest nawet częściowo rozstrzygalny, wystarczy znaleźć $S \subseteq \mathbb{N}$ taki, że jest on częściowo rozstrzygalny, ale nie jest rozstrzygalny. Wówczas $\mathbb{N} \setminus S$ nie będzie nawet częściowo rozstrzygalny. Aby skonstruować taki zbiór S, potrzebna jest pewna wiedza; zakładamy, że Czytelnik Doświadczony zna definicję i podstawowe intuicje związane z maszynami Turinga. Zbiór maszyn Turinga, które akceptują słowo puste, jest częściowo rozstrzygalny (wystarczy znaleźć bieg akceptujący dla tego słowa pustego), ale nie jest rozstrzygalny (uzasadnienie można znaleźć np. w artykule Szymona Toruńczyka „Paradoks Russella" w Δ^{11}_{17}). Każdą maszynę Turinga można jednoznacznie zakodować jako liczbę naturalną. Zatem zbiór zakodowań maszyn Turinga, które akceptują słowo puste, jest częściowo rozstrzygalny, ale rozstrzygalny już nie jest.

Wojciech CZERWIŃSKI