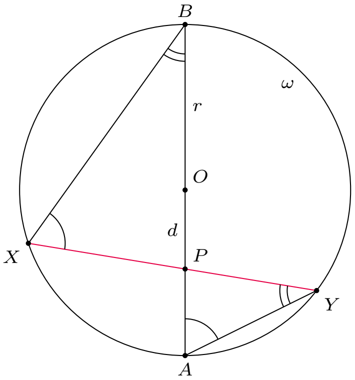
Potęga punktu względem okręgu

Bartłomiej BZDĘGA

Rozważmy okrąg $\omega = o(O, r)$ o środku O i promieniu r oraz ustalmy pewien punkt P w odległości d od punktu O (na rysunku obok $d < r$). Niech AB będzie taką średnicą okręgu ω, by punkt P leżał na prostej AB. Przez punkt P prowadzimy dowolną prostą, która przecina okrąg ω w punktach X i Y. Z podobieństwa trójkątów APY i XPB wynika, że

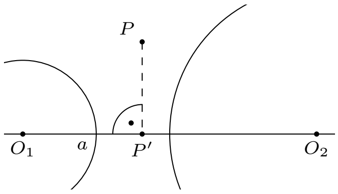
$$|PX| \cdot |PY| = |PA| \cdot |PB| = (r-d)(r+d) = r^2 - d^2,$$

zatem wartość tego iloczynu nie zależy od wyboru prostej przechodzącej przez punkt P. Pozostawiamy Czytelnikowi wykazanie, że jeśli punkt P leży na zewnątrz lub na okręgu ω, to $|PX| \cdot |PY| = d^2 - r^2$. Liczbę $\mathcal{P}_\omega(P) = |OP|^2 - r^2$ nazywamy *potęgą punktu P względem okręgu $\omega = o(O, r)$*. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że jeśli prosta PT jest styczna do okręgu ω w punkcie T, to $\mathcal{P}_\omega(P) = |PT|^2$.



Teraz rozważmy okręgi $\omega_1 = o(O_1, r_1)$ i $\omega_2 = o(O_2, r_2)$, dla których $|O_1O_2| = D > 0$. Niech P' będzie rzutem prostokątnym punktu P na prostą O_1O_2 oraz niech $a = |O_1P'|$, przy czym wartość a bierzemy ze znakiem minus, jeśli punkt P' leży „na lewo” od O_1. Po prostych rachunkach otrzymamy

$$\mathcal{P}_{\omega_1}(P) = \mathcal{P}_{\omega_2}(P) \iff a = \frac{r_1^2 - r_2^2 + D^2}{2D}.$$



To oznacza, że zbiór tych punktów, które mają jednakową potęgę względem okręgów ω_1 i ω_2, jest prostą prostopadłą do O_1O_2. Nazywamy ją *osią potęgową okręgów ω_1 i ω_2* i będziemy oznaczać symbolem ℓ_{ω_1,ω_2}. Zauważmy też, że jeśli okręgi przecinają się w dwóch punktach, to ich oś potęgowa przechodzi przez te dwa punkty.

Osie potęgowe są przydatne w dowodzeniu współliniowości punktów: jeśli $\mathcal{P}_{o_1}(P) = \mathcal{P}_{o_2}(P)$, to punkt P leży na prostej ℓ_{o_1,o_2}.

Zadania

1. Odrobina klasyki:
   (a) W kąt o wierzchołku O wpisano dwa okręgi: o_1 styczny do ramion kąta w punktach A_1 i B_1 oraz o_2 – w punktach A_2 i B_2. Wykazać, że okręgi te wyznaczają cięciwy jednakowej długości na ich wspólnej siecznej A_1B_2.
   (b) Na każdej wspólnej stycznej dwóch rozłącznych zewnętrznie okręgów zaznaczono odcinek łączący punkty styczności. Dowieść, że środki wszystkich czterech zaznaczonych odcinków leżą na jednej prostej.
   (c) Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Z punktu P leżącego na prostej AB poprowadzono styczną do o_1 w punkcie K i do o_2 w punkcie L. Udowodnić, że trójkąt PKL jest równoramienny.
2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Okręgi o średnicach BC i DA przecinają się w punktach P i Q. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie S. Dowieść, że punkty P, Q i S leżą na jednej prostej.
3. Odcinek CT jest wysokością trójkąta ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$. Okrąg o środku C i promieniu CT oraz okrąg opisany na trójkącie ABC przecinają się w punktach P i Q. Dowieść, że prosta PQ przechodzi przez środek odcinka CT.
4. Z punktu A poprowadzono styczne do okręgu ω o środku O, w punktach K i L. Punkt M jest środkiem odcinka KL. Okrąg o, przechodzący przez punkty O i M, przecina okrąg ω w punktach B i C. Wykazać, że punkty A, B i C leżą na jednej prostej.
5. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg styczny do odcinków BC i AC przecina odcinek AB w punktach K i L. Wykazać, że $\big||AK| - |BL|\big| \leqslant \big||AC| - |BC|\big|$.
6. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego, a punkt H ortocentrum trójkąta ostrokątnego i różnobocznego ABC. Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach CA i CB, przy czym czworokąt $CPHQ$ jest równoległobokiem. Wykazać, że $|OP| = |OQ|$.
7. Średnica AB i prostopadła do niej cięciwa PQ okręgu o przecinają się w punkcie S. Okrąg ω jest styczny (wewnętrznie) do okręgu o i do odcinków PS oraz BS. Niech T będzie punktem styczności okręgu ω do odcinka BS. Wykazać, że $|AT| = |AP|$.

Wskazówki do zadań

1. Należy poszukiwać punktów, których potęgi względem pewnych okręgów można obliczyć na parę sposobów, oraz osi potęgowych par okręgów występujących w zadaniu. (Ta wskazówka odnosi się także do wszystkich pozostałych zadań.)
2. Prosta PQ jest osią potęgową pary okręgów z zadania, więc wystarczy wykazać, że punkt S ma jednakową względem nich potęgę. Można to zrobić za pomocą podobieństwa trójkątów ABS i CDS.
3. Trzeba wykazać, że punkt C ma równą potęgę względem obu okręgów z zadania. Umiejętne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa powinno wystarczyć.
4. Niech Γ będzie okręgiem o średnicy OL. Wówczas okrąg Γ przechodzi przez punkt M i jest styczny do prostej AL w punkcie L. Wystarczy zauważyć, że punkt A ma jednakową potęgę względem okręgów o, Γ i ω.
5. Można obliczyć na dwa sposoby potęgi punktów A i B względem okręgu z zadania i odjąć stronami otrzymane równości.
6. Wystarczy udowodnić, że punkty P i Q mają równą potęgę względem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Do tego celu wystarczy podobieństwo odpowiednich trójkątów.
7. Niech K i L będą punktami styczności okręgu ω do, odpowiednio, okręgu o i odcinka PS. Wówczas punkty A, K i L są współliniowe, gdyż punkt K jest obrazem punktu A w jednokładności względem punktu L, która przekształca okrąg o na ω. Mamy też $|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle ALP|$, bo są to kąty wpisane, oparte na równej długości łukach okręgu o. Resztę załatwia podobieństwo trójkątów i potęga punktu A względem okręgu ω.