Systemy pozycyjne w trikach karcianych

Karol GRYSZKA *

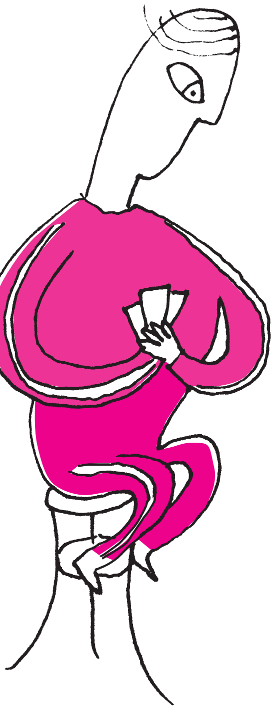
* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Pokazy iluzjonistyczne nacechowane są elementami odwracającymi uwagę, nadzwyczajną zwinnością, sprawnością ruchową lub rachunkową iluzjonisty. Dla nas, matematyków, najciekawsze są oczywiście te wykorzystujące pewne aspekty matematyki. Przedstawimy kilka trików, które łączy wspólne ogniwo – systemy pozycyjne.

Przypomnijmy, że każdą liczbę naturalną N można zapisać w **systemie o podstawie** n w następujący sposób:

$$N = b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + b_3 n^3 + \ldots,$$

gdzie $b_k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Na przykład liczbę 15 z systemu dziesiętnego „przetłumaczymy" na binarny (dwójkowy) jako $1111_{(2)}$, tj. $15_{(10)} = 1111_{(2)}$ (liczby w indeksach dolnych wskazują na podstawę systemu). W systemie o postawie 3 mamy $15_{(10)} = 120_{(3)}$.



Trik 1. – *Bereniko, proszę o wybranie jednej liczby z przedziału od* 1 *do* 15 *– rzekł iluzjonista do ochotniczki.*
– *Już wybrałam – odpowiedziała po chwili.*
– *A teraz proszę o wskazanie, na których kartach jest Twoja liczba.*
– *Hmm... – zamyśliła się na chwilę. – Jest na pierwszej, trzeciej i czwartej.*
– *Ach, fantastycznie! Wybrałaś* 13 *– odpowiedział niezwłocznie iluzjonista, wywołując tym samym zachwyt ochotniczki.*

1	3	2	3	4	5	8	9
5	7	6	7	6	7	10	11
9	11	10	11	12	13	12	13
13	15	14	15	14	15	14	15

W jaki sposób iluzjonista odgadł liczbę? Zasadniczo nie jest potrzebna znajomość systemów pozycyjnych, aby wykonać tę sztuczkę. Liczby na kartach są tak dobrane, że niezależnie od tego, jaką liczbę wybierze Berenika, wskazane przez nią karty determinują zawsze tylko jedną liczbę. Z drugiej strony znajomość systemów pozycyjnych pozwala ten trik usprawnić oraz modyfikować.

Spójrzmy na liczby stojące w lewym górnym rogu kart wskazanych przez Berenikę – ich suma jest równa wybranej liczbie. Ochotniczka wskazała karty, licząc od lewej, pierwszą, trzecią i czwartą, więc iluzjonista wykonuje $1 + 4 + 8$ i tym sposobem otrzymuje 13. Gdyby Berenika wybrała 10, wskazałaby karty drugą i czwartą – iluzjonista wykonując działanie $2 + 8$, „odgadłby" jej liczbę bez problemu.

No dobrze, ale skąd się wzięły właśnie takie liczby na poszczególnych kartach? Pierwsza karta zawiera te liczby, które w systemie dwójkowym mają ostatnią cyfrę z prawej strony równą 1. Druga karta – wszystkie liczby mają drugą cyfrę od prawej równą 1 (w systemie dwójkowym). Trzecia karta zawiera liczby, których trzecia cyfra od prawej jest równa 1 (w systemie dwójkowym). I analogicznie czwarta karta. W ten sposób kodujemy wszystkie liczby z przedziału od 1 do 15.

Trik 2. – *Alfredzie, odrzuć z pełnej talii* 25 *kart. Z pozostałych wybierz jedną i zapamiętaj ją. To będzie Twoja karta. Nie pokazuj jej nikomu. Ty zaś, Bereniko, powiedz swoją ulubioną liczbę z przedziału od* 1 *do* 27 *– prosi iluzjonista.*
Alfred wykonuje instrukcje i po chwili oddaje iluzjoniście 27 *kart.*
– *Wybrałam liczbę* 6 *– dodaje Berenika.*
– *Doskonale. Podzielę teraz karty na trzy równe stosy, figurami do góry. Gdy to skończę, wskaż stos, w którym jest Twoja karta – iluzjonista zwrócił się do Alfreda, po czym ułożył stosy.*
– *Tutaj – Alfred wskazał na jeden z nich.*

Rozwiązanie zadania M 1615.
Wskażemy bijekcję między zbiorami rozwiązań przedstawionych w zadaniu nierówności. Załóżmy, że liczby całkowite $a_1, \ldots, a_n$ spełniają $\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant m$. Możemy na dwa sposoby wskazać $a_0 \neq 0$ takie, że $\sum_{i=0}^{n} |a_i| = m + 1$. Każdy ciąg $(n+1)$ liczb spełniający tę równość (oraz $a_0 \neq 0$) możemy podzielić na *bloki*, czyli fragmenty postaci $(x, 0, \ldots, 0)$, gdzie $x \neq 0$. Jeśli długość takiego bloku to k, to przyporządkujemy mu blok $(y, 0, \ldots, 0)$ długości $|x|$, gdzie $|y| = k$ oraz y jest tego samego znaku, co x. Wykonując tę operację na wszystkich blokach, dostaniemy ciąg $b_0, \ldots, b_m$, gdzie $\sum_{i=0}^{m} |b_i| = n + 1$ i $b_0 \neq 0$, co daje nam ciąg liczb całkowitych $b_1, \ldots b_m$ spełniający $\sum_{i=1}^{m} b_i \leqslant n$. Nietrudno przekonać się, że przedstawione przekształcenie jest wzajemnie jednoznaczne, co kończy rozwiązanie.

Rozdanie 3	2	1	Kod
0	0	0	000
		1	001
		2	002
	1	0	010
		1	011
		2	012
	2	0	020
		1	021
		2	022
1	0	0	100
		1	101
		2	102
	1	0	110
		1	111
		2	112
	2	0	120
		1	121
		2	122
2	0	0	200
		1	201
		2	202
	1	0	210
		1	211
		2	212
	2	0	220
		1	221
		2	222

Następnie iluzjonista jeszcze dwukrotnie rozłożył wszystkie karty na trzech stosach i prosił o wskazanie tego, na którym była karta Alfreda.
– Bereniko, podaj nam raz jeszcze swoją liczbę!
– 6 – odpowiedziała.
– Patrzcie uważnie, moi drodzy! – rzekł magik, po czym zaczął odliczać karty i szósta, którą wyłożył, była tą wybraną przez Alfreda.

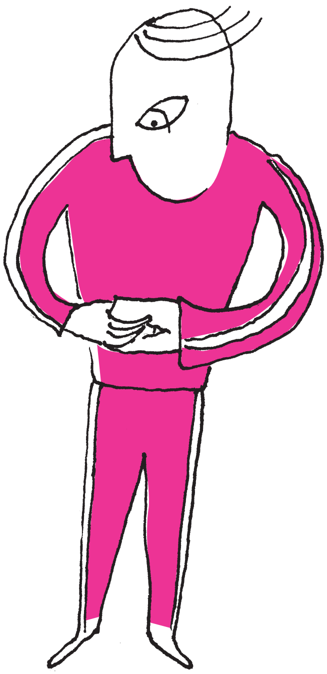
W jaki sposób iluzjonista umieścił kartę we właściwym miejscu? Przyjrzyjmy się schematowi przedstawionemu na marginesie. Kolumna z nagłówkiem „Kod” to liczby od 0 do 26 zapisane w systemie trójkowym. Kolumna „Rozdanie” opisuje możliwe ułożenia każdej karty w kolejnych rozdaniach. Jak przebiegają rozdania i co właściwie robi iluzjonista?

Przebieg sztuczki dla iluzjonisty zaczyna się od pomniejszenia liczby Bereniki o 1 (stąd w prawej kolumnie zapis liczb od 0 do 26) – otrzymuje 5. Następnie przedstawia tę liczbę w systemie trójkowym: $\mathbf{5}_{(10)} = \mathbf{012}_{(3)}$ (zapis uzupełniamy zerami z lewej strony tak, aby otrzymać trzy cyfry). Czyta cyfry tej liczby od prawej do lewej (a więc odczytuje kolejno 2, 1 oraz 0) i każdej przyporządkowuje pozycję: góra – 0, środek – 1 oraz dół – 2. Iluzjonista dokłada po kolei jedną kartę na lewy stos, jedną na środkowy, jedną na prawy i tak dalej. Gdy wyłoży już wszystkie i Alfred wskaże stos z jego kartą, iluzjonista zbiera stosy i układa je w taki sposób, by stos z kartą Alfreda znalazł się w pozycji odpowiadającej kolejno przeczytanym cyfrom. Czyli: pierwsza przeczytana cyfra to 2, a więc po pierwszym rozdaniu iluzjonista umieszcza stos z kartą Alfreda na spodzie. Analogicznie w pozostałych rozdaniach: po drugim – w środku i po trzecim – na górze.

Przesunięcie na sam dół stosu, który jako pierwszy wskazał Alfred, spowoduje, że jego karta trafi do „puli” liczb, których pierwszą od lewej cyfrą jest 2 (patrz schemat, kolumna „Rozdanie 1”). Ułożenie kart w drugim rozdaniu redukuje lokalizację karty do miejsc, w których kodzie drugą cyfrą jest 1 (są to wiersze 6, 15 i 24, czyli liczby $\mathbf{012}_{(3)}, \mathbf{112}_{(3)}$ oraz $\mathbf{212}_{(3)}$). Wreszcie – ułożenie ich po trzecim rozdaniu wskazuje pozycję szóstą i liczbę $\mathbf{012}_{(3)}$.

Ponieważ jest dokładnie 27 różnych liczb trzycyfrowych w systemie trójkowym, to każda z pozycji 0–26 jest opisana jednoznacznie.

Trik 3. *– Bereniko, wybierz z pełnej talii kart jedną dowolną i zapamiętaj ją. Alfredzie, tym razem powiedz na głos jedną wybraną liczbę z przedziału od* 1 *do* 52.
– Gotowe – odpowiada Berenika.
– Wybrałem 45 *– dodaje po chwili Alfred.*
– Świetnie! Bereniko, połóż teraz swoją kartę na wierzch stosu.
Iluzjonista zręcznie tasuje kilkukrotnie karty, po czym cierpliwie je odlicza i pokazuje, że na pozycji numer 45 *jest wybrana przez Berenikę karta.*



Sekret polega na sposobie tasowania kart – tak zwanych idealnych tasowaniach. Jest to dość trudna sztuka, polegająca na podzieleniu całego pliku kart na dwa równe stosy (po 26 kart każdy) i takim ich potasowaniu, aby karty potasowanej talii ułożone były naprzemiennie po jednej z każdego stosu. Poniżej przedstawiamy dwa możliwe schematy takiego tasowania dla 10 kart.

talia		podział			**0**-tasowanie		**1**-tasowanie
♠6					♠6		♡6
♠5					♡6		♠6
♠4		♡6	♠6		♠5		♡5
♠3		♡5	♠5		♡5		♠5
♠2		♡4	♠4		♠4		♡4
♡6	→	♡3	♠3	→	♡4	lub	♠4
♡5		♡2	♠2		♠3		♡3
♡4					♡3		♠3
♡3					♠2		♡2
♡2					♡2		♠2

W jaki sposób iluzjonista wykorzystuje taką technikę? Podobnie jak w poprzednim triku od wybranej liczby odejmuje 1, tym razem jednak przedstawia tak otrzymaną liczbę w systemie dwójkowym: $44_{(10)} = 101100_{(2)}$. Następnie wykonuje serię tak zwanych **0**-tasowań lub **1**-tasowań (patrz rysunek na dole poprzedniej strony). W **0**-tasowaniu karty z górnej połowy stosu umieszczane są na miejscach nieparzystych z zachowaniem ich kolejności w potasowanym pliku; w **1**-tasowaniu górna połowa zajmuje odpowiednio pozycje parzyste. Iluzjonista wykonuje serię **0**-tasowań i **1**-tasowań zgodnie z kolejnymi cyframi rozwinięcia dwójkowego, od lewej do prawej. Przy wyborze Alfreda wykona zatem kolejno **1**-tasowanie, **0**-tasowanie, **1**-tasowanie, **1**-tasowanie, **0**-tasowanie i **0**-tasowanie.

Sekret działania triku ukryty jest w zapisie liczby w systemie dwójkowym i właściwej obserwacji tego, co dokładnie robią tasowania z kartami. Zauważmy, że **0**-tasowanie podwaja liczbę kart **nad** każdą z kart górnej części stosu, zaś **1**-tasowanie podwaja i dodaje jeszcze jedną nad. Dokładnie to samo dzieje się, gdy „tłumaczymy” zapis binarny na dziesiętny, czytając cyfry od lewej do prawej: czytając 0 podwajamy liczbę; czytając 1 podwajamy i dodajemy 1. W opisanym przykładzie karta na wierzchu ma 0 kart nad sobą. Po pierwszym tasowaniu będzie miała 1 kartę, po drugim 2, po trzecim 5 i tak dalej, zgodnie z poniższym schematem:

$$0 \xrightarrow{\mathbf{1}} 1 \xrightarrow{\mathbf{0}} 2 \xrightarrow{\mathbf{1}} 5 \xrightarrow{\mathbf{1}} 11 \xrightarrow{\mathbf{0}} 22 \xrightarrow{\mathbf{0}} 44.$$

Liczbę $101100_{(2)}$ można przekształcić do zapisu w systemie dziesiętnym standardowo, to jest

$$\begin{aligned} 101100_{(2)} &= 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 \\ &= 32 + 8 + 4 = 44, \end{aligned}$$

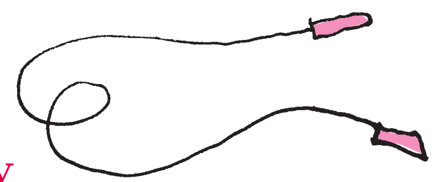
ale można również czytać liczby od lewej do prawej i, zaczynając od zera, za każdym razem podwajać liczbę (wcześniejszy wynik) i dodać przeczytaną właśnie liczbę. Mamy kolejno: 0; $2 \cdot 0 + \mathbf{1} = 1$; $2 \cdot 1 + \mathbf{0} = 2$, $2 \cdot 2 + \mathbf{1} = 5$; $5 \cdot 2 + \mathbf{1} = 11$; $11 \cdot 2 + \mathbf{0} = 22$; $22 \cdot 2 + \mathbf{0} = 44$.

Ostatecznie nad kartą będą 44 inne i iluzjonista może spokojnie rozpocząć odliczanie.

W tym triku, w odróżnieniu od poprzedniego, liczba tasowań jest zmienna i zależy od tego, ile cyfr ma reprezentacja binarna liczby.

Ilość tasowań dla dowolnej talii N kart nie przekroczy liczby $\lceil \log_2 N \rceil$.

Na zakończenie Czytelnik zapoznany z powyższymi sztuczkami pewnie nie będzie zaskoczony tym, że Trik 1. można uogólnić na więcej kart i szerszy zakres liczb, Trik 2. na liczbę kart postaci n^k, gdzie $n, k \geqslant 2$ (ile wtedy będzie rozdań i na ile stosów?) oraz Trik 3. na dowolną (!) liczbę kart. Szczegóły pozostawiamy do samodzielnego opracowania i życzymy miłego zaskakiwania kolegów, koleżanek czy rodziców w różnych okolicznościach.



Dryfujące kontynenty

*Marek GRAD**

* Instytut Geofizyki, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Kontynenty sprawiają wrażenie czegoś bardzo stabilnego, stałego, niezmiennego. Szczególnie w skali długości życia człowieka. W języku potocznym mówi się nawet „stały ląd”. Tymczasem przemieszczenia wzdłuż uskoków podczas silnych trzęsień ziemi wskazują na istnienie ruchów poziomych i pionowych, potwierdzonych między innymi dokładnymi pomiarami techniką GPS. Kontynenty poruszały się w przeszłości i poruszają się współcześnie.

Litosfera Ziemi dzieli się na kilka wielkich płyt (np. płyta pacyficzna, płyta euroazjatycka) uzupełnionych mozaiką mniejszych płyt i mikropłyt (np. płyta arabska, płyta karaibska, płyta Scotia). Ich granice pokrywają się ze strefami o dużej aktywności sejsmicznej. Badania wnętrza Ziemi za pomocą fal powierzchniowych pokazują, że struktura do głębokości 300 km jest bardzo zróżnicowana. Na rysunku 1 (okładka) przedstawione zostały rozkłady prędkości sejsmicznych fal S w stosunku do referencyjnego modelu ak135 dla dwóch profili: równoleżnikowego i południkowego. Dodatnie anomalie prędkości $\Delta V_S/V_S$ oznaczają większe prędkości fal w ośrodku chłodniejszym (litosfera), podczas

Więcej o modelu ak135 w Δ^9_{19}.