Nieskończoność: 6. Zaskakujące rozwiązanie

Michał KORCH

W poprzednim odcinku rozważaliśmy przykłady nieskończonych zbiorów, których nie można zakwaterować w hotelu Hilberta. Były to: zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, przedział $[0, 1]$, zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych oraz zbiór $P(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Okazało się, że każde dwa z tych wymienionych zbiorów są równoliczne. Wszystkie takie zbiory, równoliczne ze zbiorem liczb rzeczywistych, nazywamy zbiorami *mocy continuum*. Żaden z nich nie jest równoliczny z żadnym zbiorem przeliczalnym, czyli takim, którego elementy da się zakwaterować w hotelu Hilberta, jak zbiory liczb naturalnych $\mathbb{N}$, całkowitych $\mathbb{Z}$ czy wymiernych $\mathbb{Q}$. W dodatku wymienione zbiory przeliczalne zawierają się w zbiorze liczb rzeczywistych, który jest mocy continuum, możemy zatem powiedzieć, że zbiory przeliczalne są zdecydowanie mniejsze od zbiorów mocy continuum.

Taki obraz sprawy zobaczył Georg Cantor w wyniku swoich badań i zadał sobie następnie zupełnie naturalne pytanie: czy jest coś pomiędzy? Czy istnieje zbiór większy niż zbiory przeliczalne, ale mniejszy niż zbiory mocy continuum? Inaczej mówiąc, czy istnieje taki nieskończony podzbiór prostej rzeczywistej, który nie jest równoliczny ani ze zbiorem liczb naturalnych, ani ze zbiorem wszystkich punktów na prostej? Cantor nie potrafił wskazać żadnego przykładu i postawił hipotezę, że taki zbiór nie istnieje. Hipotezę tę nazywamy *hipotezą continuum*.

Rzecz jasna, Georg Cantor nie był jedynym, którego nurtował wspomniany problem. Wielu współczesnych mu matematyków próbowało rozstrzygnąć to zagadnienie, bez powodzenia. David Hilbert, wygłaszając słynne przemówienie na Kongresie Matematyków w Paryżu w 1900 roku, umieścił to zagadnienie jako pierwsze z listy 23 wyzwań dla matematyki u progu kolejnego stulecia! Cytując Hilberta: „badania Cantora dotyczące takich zbiorów sugerują bardzo prawdopodobne twierdzenie, którego jednak, mimo olbrzymich wysiłków, nikomu nie udało się udowodnić”. Czy ponad wiek później znamy odpowiedź na pytanie o prawdziwość hipotezy continuum? Jeśli tak, to jaka ona jest? Odpowiedź jest dość zaskakująca, wymaga jednak pewnego wprowadzenia.

Jednym z ważniejszych punktów badań Cantora były *doskonałe podzbiory* prostej rzeczywistej (czyli osi liczbowej). Aby zrozumieć definicję takich zbiorów, wprowadzimy najpierw kilka określeń. Mówimy, że podzbiór prostej rzeczywistej jest *otwarty*, jeśli jest sumą dowolnie wielu (być może nawet nieskończenie wielu) przedziałów otwartych z obu stron. Na przykład $(0, 1) \cup (2, 3)$ jest otwartym podzbiorem prostej. Cała prosta jest też otwartym zbiorem, bo chociażby $\mathbb{R} = (-1, 1) \cup (-2, 2) \cup (-3, 3) \cup \ldots$ Również zbiór liczb niecałkowitych $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ jest otwartym podzbiorem prostej, bo rzeczywiście $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = (0, 1) \cup (-1, 0) \cup \cup (1, 2) \cup (-2, -1) \cup \ldots$ Zbiór pusty też jest otwarty jako suma zera przedziałów otwartych. Natomiast podzbiór jest *domknięty*, jeśli jest dopełnieniem podzbioru otwartego. Na przykład zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ jest domknięty. Cała prosta $\mathbb{R}$ poza tym, że jest zbiorem otwartym, jest również zbiorem domkniętym (bo zbiór pusty jest otwarty). Zachęcamy Czytelnika do sprawdzenia, że zbiór złożony z pojedynczego punktu, np. $\{1\}$, oraz domknięty przedział, np. $[1, 2]$, również są domkniętymi podzbiorami osi liczbowej. Wreszcie, *zbiór doskonały* to taki domknięty podzbiór prostej, który nie ma punktów izolowanych. Oznacza to, że do każdego jego punktu można podejść dowolnie blisko, stąpając jedynie po pozostałych punktach do tego zbioru należących. Taką cechę ma chociażby domknięty przedział, np. $[1, 2]$, ale nie ma jej na przykład zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

Innym przykładem zbioru doskonałego jest słynny *zbiór Cantora*. Aby go skonstruować, z odcinka $[0, 1]$ wycinamy otwarty przedział długości $1/3$ na środku i wyrzucamy, zostając ze zbiorem $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Z obu powstałych przedziałów znów wycinamy „środkowe jedne trzecie”. Powstają zatem cztery odcinki długości $1/9$. Z każdego z nich znów wycinamy środkową jedną trzecią i procedurę kontynuujemy w nieskończoność. Zbiór punktów, który pozostanie po tej operacji, to właśnie zbiór Cantora.

Pierwsze 7 etapów konstrukcji zbioru Cantora

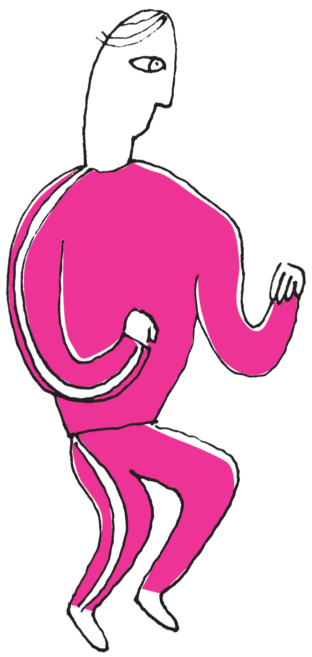
Zauważmy, że każdy punkt zbioru Cantora da się zakodować za pomocą nieskończonego ciągu zer i jedynek. Rzeczywiście, kolejne cyfry mogą oznaczać, czy dany punkt leży w lewej (cyfra 0), czy w prawej (cyfra 1) pozostawionej części odcinka na kolejnym z nieskończenie wielu etapów konstrukcji. Dla przykładu, punkty leżące w części zaznaczonej na rysunku strzałką będą zakodowane ciągiem rozpoczynającym się od 011101. W takim razie punktów w zbiorze Cantora jest tyle samo, co wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych. Powiedzieliśmy zaś już wcześniej, że takich ciągów jest continuum. Zatem zbiór Cantora jest mocy continuum.

Cantor wykazał, że każdy doskonały podzbiór prostej jest mocy continuum. Co więcej, udowodnił, że każdy domknięty podzbiór prostej albo jest przeliczalny, albo zawiera zbiór doskonały, co oznacza, że jest mocy continuum. Zatem jeśli hipotezę continuum ograniczymy tylko do zbiorów domkniętych, to jest ona prawdziwa – nie istnieje domknięty podzbiór prostej rzeczywistej większy niż zbiór przeliczalny, ale mniejszy niż zbiór mocy continuum! Cantor miał nadzieję, że wynik ten można rozszerzyć na dowolne zbiory, ale ani on, ani inni zajmujący się tym problemem nie potrafili tego zrobić.

W 1904 roku odbył się kolejny Kongres Matematyków, tym razem w Heidelbergu. Węgierski matematyk Julius König twierdził, że udowodnił, iż hipoteza continuum nie zachodzi. Tymczasem Felix Bernstein przyjechał na Kongres z referatem, którego ostatecznie nie wygłosił, ze zgoła przeciwną konkluzją. Argumenty obu matematyków okazały się nieścisłe, a hipoteza continuum pozostawała nierozstrzygnięta.

Wobec niemocy w kwestii rozstrzygnięcia hipotezy continuum matematycy zaczęli badać, jakie skutki miałaby jej prawdziwość. Słynny polski matematyk Wacław Sierpiński w 1934 roku wydał książkę *Hypothèse du continu*, w której zgromadził wiele takich wniosków z hipotezy continuum. Udowodnił na przykład, że jest ona równoważna temu, że płaszczyznę można podzielić na dwa zbiory A i B takie, że przecięcie zbioru A z każdą poziomą prostą oraz przecięcie B z każdą pionową prostą są zbiorami przeliczalnymi. Fakt ten Sierpiński umieścił na pierwszym miejscu swojej listy – sformułował 11 stwierdzeń równoważnych z hipotezą continuum oraz 81 z niej wynikających.

W międzyczasie zostały sformułowane aksjomaty opisujące teorię zbiorów, a więc w pewnym sensie całą uprawianą matematykę, bowiem wszystkie matematyczne obiekty można skonstruować na podstawie tej teorii. Te postulaty zwykło się nazywać *aksjomatami ZFC*, od nazwisk matematyków Ernesta Zermelo oraz Abrahama Fraenkela. Litera „C” wzięła się ze słowa *choice*, co odnosi się do ostatniego z aksjomatów – aksjomatu wyboru. Aksjomaty te rozciągają się od zdefiniowania, że dwa zbiory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same elementy, po chociażby postulat, że istnieje zbiór nieskończony. To wszystko pozwoliło na badanie właściwości modeli, czyli konstrukcji, które te aksjomaty spełniają. I właśnie te badania doprowadziły w 1963 roku do odkrycia, którego Czytelnik być może jest najbardziej ciekaw. Odkrycia dotyczącego samej hipotezy continuum. Odkrycia zaskakującego, które wyjaśniało wszelkie wcześniejsze niepowodzenia i trudności.



Teza tego odkrycia jest następująca: hipoteza continuum jest *niezależna* od aksjomatów ZFC. Oznacza to, że nie da się jej ani udowodnić, ani obalić, wychodząc od tych aksjomatów. Innymi słowami: umiemy udowodnić, że nie da się udowodnić słuszności hipotezy continuum oraz że nie da się udowodnić jej zaprzeczenia w oparciu o aksjomaty ZFC. (Wszystko to przy założeniu, że same aksjomaty są wewnętrznie niesprzeczne.)

Jak tego dokonano? Właśnie poprzez badanie modeli spełniających aksjomaty ZFC. Kurt Gödel już w 1940 roku skonstruował taki model, w którym i aksjomaty ZFC, i hipoteza continuum są prawdziwe. To oczywiście nie znaczy, że da się ją udowodnić, korzystając z tych aksjomatów, ponieważ nie wynika stąd, że w każdym modelu, który je spełnia, hipoteza continuum zachodzi. Ale dowodzi to, że nie da się z nich udowodnić jej zaprzeczenia (wtedy w tym modelu zaszłaby sprzeczność)! W 1963 roku sprawę dopełnił Paul Cohen, pokazując nową metodę konstrukcji modeli spełniających aksjomaty ZFC (metoda ta nazywana jest *forsingiem*), pozwalającą w szczególności skonstruować model, w którym hipoteza continuum nie zachodzi. A zatem nie da się jej udowodnić z aksjomatów. Cohen za swoją pracę otrzymał w 1966 roku „matematycznego Nobla”, czyli medal Fieldsa.

Zaskakujące? Na pewno! Na pierwszy rzut oka nie jest jasne, jak to wszystko zrozumieć. Jak to w ogóle możliwe, że jakiegoś matematycznego stwierdzenia nie da się rozstrzygnąć? Czy nie powinno być tak, że każde zdanie jest albo prawdziwe, albo fałszywe? Spróbujemy zmierzyć się z tymi pytaniami w kolejnym odcinku.