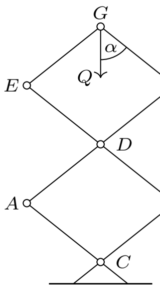
Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2019

Zadania z fizyki nr 684, 685

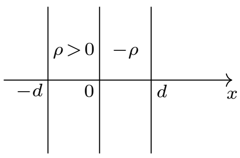
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

684. Na rysunku 1 przedstawiony jest układ sześciu nieważkich prętów, połączonych przegubowo. Pręty AF i BE są jednorodne, z przegubem w środku. Długości odcinków AC, CB, BD, AD, DE, DF, FG i GE są jednakowe. Do przegubu G przymocowany jest ciężar Q. Znaleźć naprężenie linki łączącej przeguby A i B.



Rys. 1

685. Znaleźć natężenie pola elektrycznego i potencjał od dwóch nieskończonych warstw dielektryka o stałej dielektrycznej ϵ, naładowanych z gęstościami objętościowymi $\rho > 0$ i $-\rho$ (rys. 2). Grubość każdej warstwy wynosi d. Przyjąć warunek brzegowy dla potencjału $\varphi(-d) = 0$.



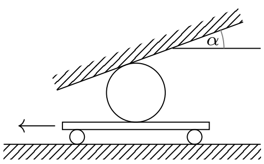
Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 6/2019

Przypominamy treść zadań:

680. Walec o masie M znajduje się między ruchomą poziomą platformą i nieruchomą powierzchnią nachyloną do poziomu pod kątem α (rys. 3). Współczynnik tarcia walca o platformę wynosi μ_1, a o powierzchnię nachyloną μ_2. Jaką minimalną siłę trzeba przyłożyć do platformy, aby walec nie obracał się, a platforma poruszała się w lewo ruchem jednostajnym?

681. Na powierzchnię szkła naniesiono cienką warstwę materiału, którego współczynnik załamania $n = 4/3$ jest mniejszy od współczynnika załamania szkła. Jaka może być najmniejsza grubość tej warstwy, aby przy prostopadłym padaniu światła białego długości fali $\lambda_1 = 700$ nm oraz $\lambda_2 = 420$ nm w świetle odbitym były jednocześnie maksymalnie wygaszone?



Rys. 3

680. Jeżeli walec nie obraca się, to suma momentów sił względem środka walca wynosi zero, stąd $T_1 = T_2 = F$ (rys. 4), gdzie F jest poziomą siłą przyłożoną do platformy. Środek masy walca pozostaje w spoczynku, zatem z warunków równowagi w kierunkach poziomym i pionowym otrzymujemy:

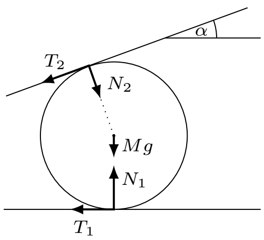
$$N_2 \sin\alpha - T_2 \cos\alpha = T_1, \tag{1}$$

$$N_1 - Mg - N_2 \cos\alpha = T_2 \sin\alpha. \tag{2}$$

Rozwiązując te równania dostajemy:

$$F = N_2 \sin\alpha / (1 + \cos\alpha), \tag{3}$$

$$N_1 = Mg + N_2. \tag{4}$$



Rys. 4

Spełniony musi być też warunek $T_1 = \mu_1 N_1 < \mu_2 N_2$, aby platforma mogła wysuwać się spod nieruchomego walca. Uwzględniając, że $F = \mu_1 N_1$, otrzymujemy z równań (3) i (4):

$$N_2 = \mu_1 Mg \Big/ \left(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} - \mu_1 \right),$$

a szukana siła F, zgodnie z równaniem (3), dana jest wzorem:

$$F = \frac{\mu_1 Mg \sin\alpha}{\sin\alpha - \mu_1 (1 + \cos\alpha)}.$$

Otrzymane wyrażenie musi być dodatnie, stąd otrzymujemy warunek:

$$\mu_1 < \sin\alpha / (1 + \cos\alpha).$$

Z nierówności $\mu_1 N_1 < \mu_2 N_2$ wynika ograniczenie na drugi współczynnik tarcia:

$$\mu_2 > \sin\alpha / (1 + \cos\alpha).$$

681. Różnica dróg optycznych promieni odbitych od górnej i dolnej powierzchni warstwy $\Delta s = 2dn$, gdzie d jest grubością warstwy. Oba promienie odbijają się od ośrodka gęstszego optycznie, warunki na minima interferencyjne dla obu długości fal mają więc postać:

$$2dn = (2k_1 + 1)\lambda_1/2 = (2k_2 + 1)\lambda_2/2,$$

gdzie $\lambda_1 > \lambda_2$. Stąd:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2(k_2\lambda_2 - k_1\lambda_1).$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy $280 = 2\,(420k_2 - 700k_1)$. Najmniejsze liczby całkowite nieujemne spełniające to równanie to $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Szukana grubość warstwy $d \approx 394$ nm.

Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2019

Zadania z matematyki nr 787, 788

Redaguje Marcin E. KUCZMA

787. Niech M będzie dowolnym niepustym skończonym zbiorem liczb całkowitych. Dowieść, że można ustawić elementy zbioru M w ciąg $(x_1,\ldots,x_n)$ tak, by dla każdej trójki wskaźników $i,j,k\in\{1,\ldots,n\}$, $i<j<k$, spełniony był warunek: $x_i+x_k\neq 2x_j$.

788. Znaleźć największą liczbę t, dla której nierówność

$$(a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)-3abc\geqslant t(a+b+c)^3$$

zachodzi dla każdej trójki liczb dodatnich a,b,c, będących długościami boków trójkąta.

Zadanie 788 zaproponował pan Zbigniew Skalik z Wrocławia (wskazując zadanie 716 z Δ^2_{16} jako źródło inspiracji).

Rozwiązania zadań z numeru 6/2019

Przypominamy treść zadań:

783. Na płaszczyźnie narysowano N kwadratów o bokach równoległych i prostopadłych do ustalonego wspólnego kierunku. Niech S będzie zbiorem środków tych kwadratów; zakładamy, że jest to N różnych punktów oraz że żaden punkt zbioru S nie leży na brzegu żadnego kwadratu. Udowodnić, że można wyróżnić niektóre z tych N kwadratów tak, by każdy punkt zbioru S leżał w co najmniej jednym wyróżnionym kwadracie oraz w co najwyżej czterech wyróżnionych kwadratach.

784. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, które można zapisać w postaci sumy $p=a^2+b^2$ $(a,b\geqslant 1$ całkowite) tak, by liczba $2ab$ była kwadratem liczby całkowitej.

783. Niech K_1 będzie największym spośród N kwadratów (jeśli jest kilka przystających, większych od pozostałych, wybieramy dowolny). Niech K_2 będzie największym spośród tych, których środki nie leżą w K_1; itd. (indukcja): niech K_j będzie największym spośród tych, których środki nie leżą w $K_1\cup\ldots\cup K_{j-1}$; gdy takich kwadratów już nie ma, kończymy numerowanie. Ponumerowane kwadraty $K_1,\ldots,K_m$ będą tymi „wyróżnionymi". Zbiór S zawiera się w $K_1\cup\ldots\cup K_m$. Przy tym środek żadnego wyróżnionego kwadratu nie leży w żadnym innym wyróżnionym kwadracie.

Przypuśćmy, że środek O któregokolwiek spośród pozostałych kwadratów leży w co najmniej pięciu wyróżnionych kwadratach. Przyjmujemy punkt O za początek układu współrzędnych Oxy o osiach równoległych do boków kwadratów (jednostkę długości wybieramy dowolnie). Osie dzielą płaszczyznę na cztery ćwiartki, więc pewne dwa wyróżnione kwadraty K_k, K_l (zawierające O) mają środki $O_k=(x_k,y_k)$, $O_l=(x_l,y_l)$ położone w jednej ćwiartce. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $|x_k|+|y_k|\geqslant|x_l|+|y_l|$. Wówczas $O_l\in K_k$, wbrew wcześniejszemu spostrzeżeniu. Sprzeczność kończy dowód.

784. Niech p będzie liczbą pierwszą o rozważanej własności: $p=a^2+b^2$, $2ab=c^2$ $(a,b,c\geqslant 1$ całkowite). Oznaczmy $a+b=s$. Tak więc $p=s^2-c^2=(s-c)(s+c)$, wobec czego $s-c=1$. Równość $c=s-1$, po podniesieniu stronami do kwadratu i podstawieniu wyrażeń określających c, s, przybiera postać

$$2ab=(a+b)^2-2(a+b)+1;$$

po kolejnym przekształceniu

$$(a-1)^2+(b-1)^2=1.$$

To znaczy, że jedna z liczb a, b jest równa 2, a druga 1, i ostatecznie $p=a^2+b^2=5$. Skoro $2ab=4$, zatem liczba pierwsza $p=5$ spełnia wymagane warunki, i jest to jedyna taka liczba.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 777 ($WT=2{,}45$) i 778 ($WT=1{,}67$) z numeru 3/2019

Paweł Najman	Kraków	44,64
Witold Bednarek	Łódź	44,57
Jerzy Cisło	Wrocław	44,26
Paweł Kubit	Kraków	41,98
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	40,74
Krzysztof Kamiński	Pabianice	38,73
Michał Koźlik	Gliwice	35,73
Janusz Olszewski	Warszawa	33,28
Janusz Fiett	Warszawa	31,23

Z trzech Panów żaden nie jest nowicjuszem… Paweł Najman jest z nami od roku 2001; zaś panowie Witold Bednarek oraz Jerzy Cisło – chociaż z długimi przerwami – od 1981 oraz 1984. Pierwsi dwaj panowie pokonują próg 44 p. już po raz ósmy!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT=4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.