Informatyczny kącik olimpijski (131): *123-Pairs*

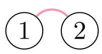
W tym odcinku omówimy rozwiązanie zadania „123-Pairs”, które pojawiło się na „Code Festival 2016”.

123-Pairs: *Danych jest $2n$ liczb naturalnych od 1 do $2n$. Chcemy połączyć te liczby w n par tak, aby każda liczba należała do dokładnie jednej pary. Dodatkowo, chcemy aby a par miało różnicę 1, b par miało różnicę 2 oraz c par miało różnicę 3. Innych par nie powinno być, tzn. $a+b+c=n$. Na ile sposobów można poparować liczby od 1 do $2n$? Należy podać resztę z dzielenia wyniku przez 10^9+7.*

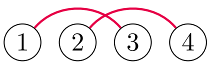
Przedział liczb naturalnych nazwiemy *zamkniętym*, jeśli liczby z tego przedziału są poparowane. Niech trójka (a', b', c') opisuje zamknięty przedział, który zawiera a' par o różnicy 1, b' par o różnicy 2 oraz c' par o różnicy 3.

Wstęp
Na początku zastanówmy się, w jaki sposób można sparować 1.

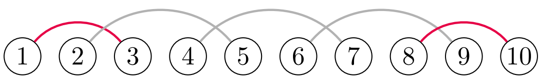
- 1 parujemy z 2. Wówczas uzyskujemy zamknięty dwuelementowy przedział, który można opisać trójką $(1,0,0)$. Takie parowanie nazwijmy P_1.



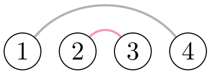
- 1 parujemy z 3. Teraz 2 możemy sparować z 4 lub 5. Jeśli 2 sparujemy z 4, to uzyskamy zamknięty czteroelementowy przedział, który można opisać trójką $(0,2,0)$.



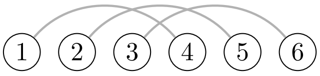
  Jeśli natomiast 2 sparujemy z 5, wtedy 4 możemy sparować z 6 i uzyskać zamknięty przedział. Z drugiej strony 4 możemy też sparować z 7. W ogólności par o różnicy 3 możemy wybrać dowolnie wiele. Aby uzyskać zamknięty przedział, na końcu trzeba ustalić parę o różnicy 2. Każdy z takich przedziałów można opisać trójką $(0,2,x)$ dla dowolnego całkowitego $x \geqslant 0$. Przedziały tego typu nazwijmy P_2.



- 1 parujemy z 4. Następnie 2 możemy sparować z 3 i uzyskać zamknięty czteroelementowy przedział opisany trójką $(1,0,1)$. Nazwijmy go P_3.



  Z drugiej strony można też 2 sparować z 5, wtedy 3 trzeba sparować z 6 i uzyskamy zamknięty sześcioelementowy przedział opisany trójką $(0,0,3)$. Nazwijmy go P_4.



Niech S (o mocy $O(n)$) oznacza zbiór wszystkich trójek opisujących zamknięte przedziały:

$$S = \{(1,0,0), (1,0,1), (0,0,3)\} \cup \{(0,2,x) : 0 \leqslant x \leqslant n-2\}$$

Rozwiązanie $O(n^4)$
W tym rozwiązaniu wykorzystamy technikę programowania dynamicznego. Niech $W[a'][b'][c']$ oznacza, na ile sposobów można poparować liczby od 1 do $2(a'+b'+c')$ tak, aby a' par miało różnicę 1, b' par miało różnicę 2 oraz c' par miało różnicę 3. Przypadkiem bazowym jest $W[0][0][0]=1$. Rozważmy zatem przypadek $a'+b'+c'>0$. Zauważmy, że poprawnie poparowany przedział $[1; 2(a'+b'+c')]$ jest sumą przedziałów zamkniętych. Każdy z wymienionych we wstępie przedziałów zamkniętych może być pierwszym przedziałem takiej sumy. Stąd otrzymujemy, że:

$$W[a'][b'][c'] = \sum_{(p_1,p_2,p_3)\in S} W[a'-p_1][b'-p_2][c'-p_3]$$

Wynikiem jest $W[a][b][c]$. Wszystkich stanów jest $O(n^3)$, obliczenie jednego stanu zajmuje $O(n)$ operacji, zatem całkowita złożoność rozwiązania to $O(n^4)$.

Rozwiązanie $O(n^2)$
Podobnie, jak we wcześniejszym rozwiązaniu, będziemy konstruowali poprawne parowanie z mniejszych elementów (przedziałów zamkniętych). Załóżmy, że do parowania wykorzystaliśmy e_1 przedziałów P_1 oraz e_4 przedziałów P_4. Wynika stąd, że przedziałów P_3 wykorzystaliśmy $e_3 = a - e_1$, zaś przedziałów P_2 wykorzystaliśmy $\frac{b}{2}$. Jeśli b jest nieparzyste, to odpowiedzią jest 0. Liczba par o różnicy 3 we wszystkich przedziałach typu P_2 wynosi $t = c - e_3 - 3e_4$. Wybrane przedziały możemy ułożyć na $\frac{(e_1+e_2+e_3+e_4)!}{e_1!\cdot e_2!\cdot e_3!\cdot e_4!}$ sposobów. Proszę zauważyć, że jako P_2 rozumiemy klasę przedziałów postaci $(0,2,x)$ (nie ustaliliśmy, ile par o różnicy 3 jest w każdym z tych przedziałów). Niech zatem x_i (dla każdego i od 1 do e_2) oznacza, ile par o różnicy 3 występuje w i-tym przedziale typu P_2. Chcemy, żeby $x_1 + x_2 + \ldots + x_{e_2} = t$. Liczba rozwiązań tej równości w liczbach naturalnych to $\binom{t+e_2-1}{e_2-1}$. Stąd, dla ustalonego e_1 i e_4 liczba parowań wynosi:

$$\frac{(e_1+e_2+e_3+e_4)!}{e_1!\cdot e_2!\cdot e_3!\cdot e_4!} \cdot \binom{t+e_2-1}{e_2-1}$$

Po spamiętaniu wartości silni oraz odwrotności modularnych silni, powyższe wyrażenie potrafimy obliczyć w czasie $O(1)$. Liczba wszystkich parowań to suma wyników dla każdego e_1 od 0 do a oraz dla każdego e_4 od 0 do $\lceil \frac{c}{3} \rceil$. Całe rozwiązanie działa w czasie $O(n^2)$.

Bartosz ŁUKASIEWICZ