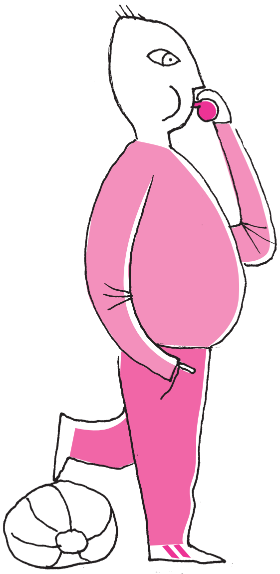
Historia pewnego trenera

*Janusz SCHMUDE**

*doktorant, Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Czy pokazując poprawność algorytmu, warto sięgnąć po matematyczne twierdzenia? Jak najbardziej! Przekonamy się o tym, rozważając problem zbalansowanego rozwoju w 2-wymiarowych systemach dodawania wektorów (*Vector Addition Systems* – VAS), ubrany w historyjkę o zawodniku i trenerze.

Rozważmy trenera, który trenuje jednego zawodnika. Co pewien czas, na przykład co 3 miesiące, trener musi wybrać metodę treningową na kolejny okres z pewnej skończonej puli metod $\mathcal{A}$. W tym celu korzysta z pomocy symulatora, w którym może sprawdzić, jakie umiejętności będzie miał dany zawodnik po zastosowaniu metody $X \in \mathcal{A}$. Zależy mu na znalezieniu takiego ciągu metod, aby po ich kolejnym zastosowaniu zawodnik rozwinął się w sposób zbalansowany – o tym, co przez to rozumiemy, za chwilę.



Zakładamy, że zawodnik x jest w całości opisany przez parę liczb naturalnych, na przykład: szybkość, technika. Założymy również, że metody trenera to wektory liczb całkowitych, a aplikacja metody do zawodnika powoduje przesunięcie jego umiejętności o taki właśnie wektor, o ile nie powoduje to „zejścia” któregoś z parametrów poniżej zera.

Mówimy, że zawodnik $x = (x_1, x_2)$ jest *z całą pewnością lepszy lub równy* zawodnikowi $y = (y_1, y_2)$, co zapisujemy $(x_1, x_2) \geqslant (y_1, y_2)$, jeżeli jest co najmniej tak samo szybki i wyszkolony technicznie, czyli gdy jednocześnie $x_1 \geqslant y_1$ i $x_2 \geqslant y_2$. Jeżeli dodatkowo nie jest mu równy, czyli $x_1 \neq y_1$ lub $x_2 \neq y_2$, to piszemy $x > y$, na przykład $(500, 600) > (500, 500)$. Uważny Czytelnik od razu spostrzeże, że niektórzy zawodnicy są nieporównywalni, na przykład (600, 700) i (800, 500). Powiemy, że zawodnik *rozwinął się (w sposób zbalansowany)*, jeżeli stał się z całą pewnością lepszy. *Ścieżką treningową* nazywamy dowolny ciąg metod treningowych $T = X_1 X_2 \ldots X_n$, a efekt zastosowania kolejno metod $X_1, X_2, \ldots$ dla zawodnika x będziemy oznaczać przez $T(x)$. Ścieżkę T nazwiemy *rozwojową* dla zawodnika x, jeżeli po jej zastosowaniu rozwinął się, czyli gdy $T(x) > x$.

Przykład 1. Niech $\mathcal{A} = \{A, B\}$, gdzie $A = (4, -4)$, a $B = (-2, 4)$. Ścieżka $T = ABB$ jest rozwojowa dla $x = (4, 4)$, gdyż $(4,4) \xrightarrow{A} (8,0) \xrightarrow{B} (6,4) \xrightarrow{B} (4,8)$, a $(4,8) > (4,4)$. Nie jest ona rozwojowa dla $y = (1,1)$, ponieważ w tym punkcie nie można zastosować metody A, gdyż $y_2 + A_2 = 1 + (-4) = -3$ jest liczbą ujemną. Co więcej, dla y nie ma żadnej ścieżki rozwojowej.

Sformułujemy teraz problem w sposób ścisły i zaproponujemy algorytm, który ma go rozwiązywać.

PROBLEM ZBALANSOWANEGO ROZWOJU:
DANE WEJŚCIOWE:
punkt (startowy) $x_0 \in \mathbb{N}^2$,
skończony zbiór $\mathcal{A}$ par liczb całkowitych (wektorów).
PYTANIE: czy istnieje taki ciąg punktów kratowych w ćwiartce dodatniej $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{N}^2$, że dla każdego i istnieje wektor $A \in \mathcal{A}$ taki, że $x_{i+1} = x_i + A$ oraz $x_n > x_0$?

Najpierw podamy bez dowodu pewien lemat pomocniczy.

Fakt ten nie jest prawdziwy w wymiarach wyższych niż 2.

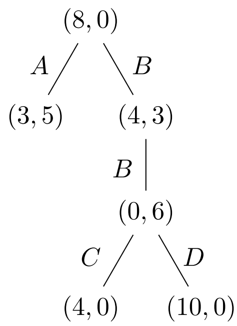
Lemat 1. *Istnieje ścieżka rozwojowa z x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ścieżka rozwojowa z pewnego punktu x_k osiągalnego z x_0 (czyli takiego, że $x_k = T(x_0)$, dla pewnej ścieżki T).*

Mając na uwadze powyższy lemat, będziemy zajmować się pytaniem, czy jest punkt x_k osiągalny z x_0, z którego istnieje ścieżka rozwojowa. Równoważnie: szukamy ścieżki $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ takiej, że $x_k < x_n$ dla jakiegoś $0 \leqslant k < n$.

Algorytm. Konstruujemy kandydata na $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ przez *back-tracking*, czyli „jak nie wyjdzie, to zrób krok wstecz i pójdź w innym kierunku”: będąc w punkcie x_i, aplikujemy niezaaplikowaną do tej pory w tym punkcie metodę A

(o ile jest taka), otrzymując kolejny punkt na ścieżce $x_{i+1} = x_i + A$. Gdy „nie wyjdzie”, czyli gdy x_{i+1} jest mniejszy lub równy pewnemu x_k obecnemu już na ścieżce, robimy „krok wstecz”, czyli usuwamy x_{i+1} ze ścieżki i cofamy się do x_i. Jeżeli z kolei x_{i+1} jest większy od któregoś x_k obecnego już na ścieżce, kończymy algorytm i zwracamy TAK, ponieważ ścieżka $(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{i+1})$ jest rozwojowa dla x_k (por. lemat 1). Jeżeli algorytm nie może wykonać już żadnego kroku, zwraca NIE.

Przykład 2. Rozważmy następującą instancję problemu: $x_0 = (8,0)$, $\mathcal{A} = \{A, B, C, D\}$, gdzie $A = (-5,5)$, $B = (-4,3)$, $C = (4,-6)$, $D = (10,-6)$. Wówczas stosując powyższy algorytm, otrzymujemy drzewo ścieżek



Ścieżki A nie da się kontynuować; w $\mathcal{A}$ nie ma wektora, który po dodaniu do (3,5) miałby obie współrzędne nieujemne. Z kolei BBC prowadzi do mniejszego punktu. Wreszcie BBD prowadzi do większego.

Na pierwszy rzut oka algorytm po prostu działa. Okazuje się, że trochę tutaj przemilczeliśmy…

Ustalmy jakieś x_0 i $\mathcal{A}$. Jest jasne, że jeżeli powyższy algorytm zatrzyma się i zwróci odpowiedź, to jest ona poprawna. Ale czy algorytm na pewno się zatrzymuje?

Skąd wiadomo, że każda ścieżka zostanie zakończona? Czy może się zdarzyć, że na pewnej ścieżce będziemy otrzymywać coraz inne nieporównywalne wartości, na przykład (70, 130), (90, 110), (100, 100), (80, 120), …? Czy trener może nigdy nie odejść od komputera? Okazuje się, że nie może tak się zdarzyć, a wynika to bezpośrednio z lematu Dicksona.

Lemat 2 (Dicksona). *Niech $x_1, x_2, x_3, \ldots$ to nieskończony ciąg punktów z $\mathbb{N}^2$. Wówczas istnieją pewne dwa indeksy $i < j$ takie, że $x_i \leqslant x_j$.*

A zatem, gdyby pewna ścieżka nigdy nie została zakończona, to wszystkie pary liczb na niej byłyby nieporównywalne, co przeczyłoby lematowi Dicksona.

Trener już się cieszy, że symulacje na pewno kiedyś się zakończą i wróci na treningi. Ale zaraz, zaraz… udowodniliśmy jedynie, że żadna ścieżka nie jest nieskończona. Czy jednak nie może być tak, że każda ścieżka jest skończona, ale jest nieskończenie wiele coraz dłuższych ścieżek? Wówczas nasz algorytm nigdy by się nie zatrzymał. Okazuje się, że tak nie może być, a odpowiada za to lemat Königa, zastosowany do drzewa konfiguracji symulatora.

Lemat 3 (Königa). *Jeżeli w drzewie skierowanym T każdy wierzchołek ma skończenie wiele następników i w T nie ma nieskończonej ścieżki, to T ma skończenie wiele wierzchołków.*

Podsumowując dowód, na mocy Lematu Dicksona wszystkie ścieżki w drzewie konfiguracji symulatora są skończone, a więc na mocy Lematu Königa ma ono skończenie wiele wierzchołków. Wynika stąd, że algorytm zatrzyma się i, jak już zauważyliśmy, zwróci poprawną odpowiedź.

A jak rozwiązać ten problem w wymiarze większym niż 2? Pomocny okaże się artykuł autorstwa Wojciecha Czerwińskiego „Na granicy możliwości” (Δ^1_{14}). Zachęcamy do jego lektury!

Rozwiązanie zadania F 985.
Fale, które obserwujemy na morzu, to fale grawitacyjne. Analiza wymiarowa pozwala stwierdzić, że prędkość c takich fal jest proporcjonalna do pierwiastka z iloczynu głębokości wody h i przyspieszenia ziemskiego g:

$$c \propto \sqrt{gh}.$$

Wynika stąd prawo załamania na granicy obszarów o głębokościach h_1 i h_2:

$$\frac{\sin(\alpha(h_1))}{\sin(\alpha(h_2))} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}.$$

Oznacza to, że wraz ze zmniejszaniem się głębokości wody maleje kąt, jaki prędkość fali tworzy z linią prostopadłą do brzegu – zakładamy, że głębokość powoli rośnie wraz z oddalaniem się od brzegu. Prędkość fali dobiegającej do brzegu jest więc do tego brzegu prostopadła, a tym samym grzbiet fali do brzegu równoległy. Ściśle biorąc, użyta przez nas zależność prędkości fali od głębokości obowiązuje, gdy głębokość jest znacznie mniejsza niż długość fali, ale właśnie taki przypadek nas interesuje.

Rozwiązanie zadania F 986.
Siłą dośrodkową podczas obiegu Ziemi wokół Słońca jest siła przyciągania grawitacyjnego Ziemia-Słońce. Promień kołowej orbity Ziemi oznaczmy jako r, a masy Ziemi i Słońca, odpowiednio, jako M_Z i M_S. Mamy wówczas:

$$\frac{4\pi^2 M_Z r}{T^2} = \frac{G M_z M_s}{r^2}.$$

Stałą grawitacji G możemy wyznaczyć na podstawie znajomości przyspieszenia ziemskiego g:

$$G = \frac{gR^2}{M_Z},$$

a stosunek mas Słońca i Ziemi

$$\frac{M_S}{M_Z} = \frac{\rho_S R_S^3}{\rho_Z R^3},$$

gdzie $R_S = r\delta/2$ oznacza promień Słońca, a $\delta = \pi/360$.
Mamy w ten sposób komplet informacji pozwalających wyznaczyć stosunek gęstości Słońca do gęstości Ziemi:

$$\frac{\rho_S}{\rho_Z} = \frac{4\pi^2 R}{g \cdot T^2 \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^3} = \frac{4 \cdot R \cdot 720^3}{10 \cdot T^2 \pi} \approx 0{,}31.$$

Wartość podawana w tablicach to 0,255. Warto zauważyć, że promień Ziemi wyznaczono już w starożytności, a pozostałe dane użyte w obliczeniach każdy z nas potrafi bez trudu wyznaczyć na podstawie prostych obserwacji.