Funkcja Eulera

Witold BEDNAREK

Niech $\varphi(n)$ (gdzie n jest dodatnią liczbą naturalną) oznacza funkcję Eulera, czyli liczbę liczb naturalnych nie większych od n i względnie pierwszych z n. Na przykład

$$\varphi(1)=1,\ \varphi(2)=1,\ \varphi(3)=2,\ \varphi(4)=2,\ \varphi(5)=4,\ \varphi(6)=2.$$

Przypomnijmy dwie powszechnie znane własności funkcji Eulera:

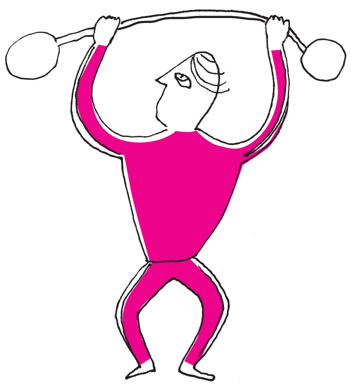
Twierdzenie. *Jeśli $p_1, p_2, \ldots, p_k$ są różnymi liczbami pierwszymi i $m_1, m_2, \ldots, m_k > 0$ są liczbami naturalnymi, to*

$$\varphi(p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{m_k}) = p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{m_k}\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Twierdzenie (Eulera). *Jeśli $a, n > 0$ są liczbami naturalnymi oraz* $\mathrm{nwd}(a,n)=1$, *to $n|a^{\varphi(n)}-1$.*

Zauważmy, że jeśli $n=p$ jest liczbą pierwszą i $\mathrm{nwd}(a,p)=1$ (czyli $p\nmid a$), to wobec $\varphi(p)=p-1$ mamy podzielność $p|a^{p-1}-1$, czyli tezę w małym twierdzeniu Fermata.

Nietrudno jest udowodnić, że dla $n\geqslant 3$ liczba $\varphi(n)$ jest parzysta (Czytelniku, spróbuj sam!). Okazuje się, że nie każda liczba naturalna parzysta jest wartością funkcji Eulera φ. Andrzej Schinzel udowodnił, że dla żadnego naturalnego $k\geqslant 1$ liczba $2\cdot 7^k$ nie jest wartością funkcji φ.



Jeśli p jest liczbą pierwszą, to $\varphi(p)|p-1$ (bo $\varphi(p)=p-1$). W 1932 roku Derrick Henry Lehmer spytał, czy istnieje taka liczba złożona n, że $\varphi(n)|n-1$. Pytanie to do dzisiaj pozostaje bez odpowiedzi. Można łatwo uzasadnić, że jeśli $n=p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{m_k}$, to podzielność $\varphi(n)|n-1$ jest równoważna podzielności

(1) $$(p_1-1)\cdot(p_2-1)\cdot\ldots\cdot(p_k-1)\ |\ p_1p_2\ldots p_k-1.$$

Oczywiście, gdy $k=1$, to powyższa podzielność zachodzi (wtedy $n=p_1$ jest liczbą pierwszą). Dla $k\geqslant 2$ nie znaleziono liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_k$ spełniających podzielność (1) i jest wątpliwe, czy takie liczby istnieją. W 1980 roku Geoffrey L. Cohen i Peter Hagis dowiedli, że jeśli n jest liczbą złożoną i zachodzi podzielność (1), to $k\geqslant 14$ i $n>10^{20}$.

Zajmijmy się teraz równaniem

(2) $$\varphi(x)=m,$$

gdzie $m>0$ jest daną liczbą naturalną. Można udowodnić, że powyższe równanie

(a) dla $m=2\cdot 7^k$ ma 0 rozwiązań,
(b) dla $m=2\cdot 3^{6k+1}$ ma 2 rozwiązania,
(c) dla $m=12\cdot 7^{2k+1}$ ma 3 rozwiązania.

Zachodzi twierdzenie ogólne (Paul Erdős, Kevin Ford): dla każdej liczby naturalnej $s\geqslant 2$ istnieje taka liczba naturalna m, że równanie (2) ma dokładnie s rozwiązań, co więcej, dla danego $s\geqslant 2$ takich liczb jest nieskończenie wiele.

W 1922 roku Robert Daniel Carmichael sformułował hipotezę: nie istnieje takie m, że równanie (2) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Hipotezę można również wyrazić następująco: dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 1$ istnieje taka liczba naturalna $x\neq n$, że $\varphi(x)=\varphi(n)$.

W 1994 roku Aaron Schlafly i Stan Wagon, przeprowadzając obszerne obliczenia numeryczne, wykazali, że jeśli równanie $\varphi(x)=\varphi(n)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie (tj. $x=n$), to $n>10^{10^7}$, tzn. najmniejszy kontrprzykład (jeśli istnieje) dla hipotezy Carmichaela ma ponad 10 milionów cyfr.

Przejdźmy do równania

(3) $$x-\varphi(x)=k,$$

gdzie $k\geqslant 1$ jest daną liczbą naturalną. Dla $k=1$ mamy nieskończenie wiele rozwiązań i są nimi wszystkie liczby pierwsze (dlaczego?). Dla $k=3$ i $k=5$ mamy rozwiązania odpowiednio $x=9$ i $x=25$, co Czytelnik zechce sprawdzić. Niech teraz $k \geqslant 7$ będzie dowolnie ustaloną liczbą nieparzystą. Na mocy wzmocnionej hipotezy Goldbacha (każda liczba większa od 6 jest sumą dwóch różnych liczb pierwszych) istnieją takie różne liczby pierwsze p i q, że $k+1=p+q$. Przyjmijmy $x=pq$. Wtedy x spełnia równanie (3), gdyż

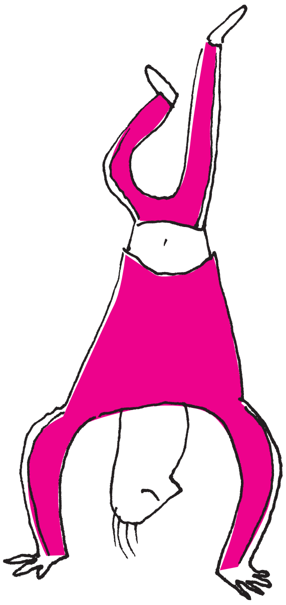
$$x-\varphi(x)=pq-\varphi(pq)=pq-(p-1)(q-1)=p+q-1=k.$$

To pokazuje hipotetyczną rozwiązalność równania (3) dla każdego nieparzystego $k \geqslant 1$.

Okazuje się, że równanie (3) może nie mieć rozwiązania dla $k>0$ parzystych. Najmniejszymi takimi k są: 10, 26, 34, 50, 52, 58, 86, 100. W 1995 roku Jerzy Browkin i Andrzej Schinzel udowodnili następujący fakt:
równanie

$$x-\varphi(x)=2^n\cdot 509203$$

nie ma rozwiązań dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$.



Na koniec kilka zadań dla Czytelnika.

Zadanie 1. Rozwiązać równania

$$\text{(a) } \varphi(x)=1, \quad \text{(b) } \varphi(x)=2, \quad \text{(c) } \varphi(x)=4.$$

Zadanie 2. Wykazać, że równanie

$$x-\varphi(x)=2^m \quad (m\in\mathbb{N}, m\geqslant 2)$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie.

Zadanie 3. Rozważamy równanie

$$(*) \qquad x-\varphi(x)=p,$$

gdzie p jest daną liczbą pierwszą. Wykazać, że równanie $(*)$:

(a) ma co najmniej jedno rozwiązanie,
(b) ma skończoną liczbę rozwiązań,
(c) może mieć dowolnie wiele rozwiązań (w zależności od p).

Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1615. Udowodnić, że dla dowolnych liczb naturalnych n, m liczba rozwiązań nierówności $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|\leqslant m$ w liczbach całkowitych jest równa liczbie rozwiązań nierówności $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_m|\leqslant n$ w liczbach całkowitych.
Rozwiązanie na str. 6

M 1616. Udowodnić, że nie istnieją takie liczby całkowite x, y, że $4xy-x-y$ jest kwadratem liczby całkowitej.
Rozwiązanie na str. 9

M 1617. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach wymiernych, który przyjmuje wartości niewymierne dla niewymiernych argumentów. Wykazać, że stopień P wynosi 1.
Rozwiązanie na str. 9

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 985. Piaszczyste brzegi mórz to zwykle miejsca, gdzie dno morskie powoli opada z odległością od krawędzi plaży. Dlaczego w takich miejscach grzbiety fal dobiegających do brzegu są do tego brzegu równoległe, niezależnie od ich kierunku na głębokiej wodzie?
Rozwiązanie na str. 11

F 986. Jaki jest stosunek średnich gęstości Słońca ρ_S i Ziemi ρ_Z, jeżeli wiadomo, że rok trwa około $T=365$ dni, przyspieszenie ziemskie $g=10\,\mathrm{m/s^2}$, promień Ziemi $R=6{,}4\cdot 10^6$ m, a rozmiary kątowe Słońca obserwowanego z Ziemi wynoszą $\delta=0{,}5°$?
Rozwiązanie na str. 11