

# Nieuczesane myśli topologa

Agnieszka STELMASZYK-ŚMIERZCHALSKA\*

\* Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, z inicjatywy Oddziału Poznańskiego PTM

*W salonie fryzjerskim siedzi matematyk, obok leży połyskująca para nożyczek, mnóstwo szczotek i innych sprzętów. Matematyk nerwowo wierci się w fotelu – przecież nie od dziś wie, że sfery zaczesać się nie da. Fryzjer intuicyjnie sięga po nożyczki, szalejące nad czołem różnaitości nie rokują zbyt dobrze. Niechętny rozspójnieniu klient wpada na pomysł – warkocz będzie idealny!*

Zachęcamy do aktywnego czytania – większość przekształceń można zbadać empirycznie, wystarczy cztery kawałki sznurka.

Autorka nie próbuje tutaj definiować normalności, toż to sprawa konieczna do rozważenia przez filozofów, jednak roboczo założmy, że przez normalność rozumiemy człowieka nieskażonego wiedzą z zakresu wyższej matematyki.

U progu XX wieku Emil Artin wprowadził do topologii dziedzinę (pozornie) blisko związaną z codziennością. Teoria warkoczy znajduje zastosowanie między innymi w biologii i kryptografii oraz w teorii węzłów. Artykuł ten stanowi zaproszenie do elementarnych rozważań nad tym zagadnieniem, przedstawiając niezbędne definicje i fakty dotyczące struktury grup warkoczy oraz klasyczne algorytmy czesania.

## Czym jest warkocz dla matematyka?

Dla „normalnego” człowieka warkocz stanowią zaplecione pasma włosów, sznurków itp. Dla wygody (i z empirycznego doświadczenia) wprowadzamy pewne uproszczenia – rozważamy  $n$ -pasmowe warkocze umieszczone wewnątrz walca, a końce zaczepione są w różnych punktach podstaw. Zakładamy, że wszelkie przeplecenia odbywają się wewnątrz „tuby”, w żadnym punkcie dwa pasma nie łączą się w jedno (nie przecinają się) i nie mogą zawracać. Nie ma też obawy, że ustalona długość pasm i skomplikowanie przepleceń spowoduje, że któreś nie dotrze do punktu zaczepienia końców – topologia to w uproszczeniu „giętka geometria” i nie ma problemu z rozciąganiem pasm.



Rys. 1. Przykładowy warkocz geometryczny

Tak więc wybieramy po  $n$  punktów na podstawach walca (ułożonego w poziomie), powiedzmy  $p_1, p_2, \dots, p_n$  na lewej podstawie oraz  $q_1, q_2, \dots, q_n$  na prawej podstawie. Rozpoczynając od punktów  $p_i$ , odbywa się splot aż do punktów zaczepienia  $q_j$ . Fachowo, warkoczem geometrycznym  $\beta$  nazywamy układ (ciąg) giętkich pasm (formalnie: wykresów funkcji), które zaplatają się wewnątrz walca, tak jak na rysunku 1.

Warto zwrócić uwagę na zachowanie pasm na podstawach walca. Przypuśćmy, że pasmo zaczynające się w punkcie  $p_1$  na lewej podstawie, kończy się w punkcie  $q_4$  na prawej podstawie itd. Wówczas połączenia między podstawami możemy zapisać jako

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ q_4 & q_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \text{ lub prościej, zostawiając tylko indeksy: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 4 & 2 & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Widzimy, że warkocz definiuje przyporządkowanie liczbom ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  liczby z tego samego zbioru (niekoniecznie inne). Przyporządkowania (różnowartościowe) opisujące przestawienia/przetrasowania liczb nazywa się *permutacjami*. Permutację pochodzącą od warkocza  $\beta$  nazywamy *permutacją indukowaną* przez ten warkocz.

Dwukroć zaplecione „taki sam” warkocz (mimo usilnych chęci czesającego) zawsze wygląda odrobinę inaczej. Fakt, że możemy użyć określenia „taki sam”, pozwala nam wnioskować, że niektóre warkocze reprezentują ten sam „rodzaj” warkocza (choćby kłos, francuz czy warkocz klasyczny trójpasmowy). Dwa warkocze uznamy za równoważne, jeśli jeden powstaje z drugiego poprzez powyginanie pasm z zaczepionymi nieruchomo końcami. Stąd indukowana permutacja jest ustalona dla konkretnej klasy równoważnych warkoczy.

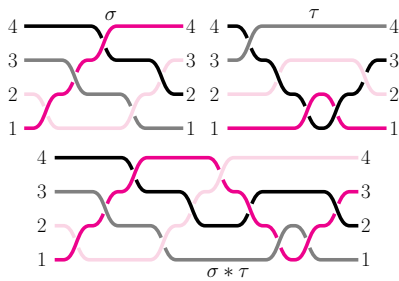
## Struktura grupy

Z warkoczami, poprzez permutacje indukowane, nieodłącznie związana jest grupa permutacji. Grupą permutacji  $S_n$  nazywamy zbiór permutacji na  $n$  elementach wraz z działaniem składania, któremu przyjrzymy się na przykładzie grupy  $S_3$ , czyli

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Grupa to jedno z fundamentalnych pojęć w matematyce. Prześledzimy je na przykładzie zbioru liczb rzeczywistych bez zera. Zbiór wraz z działaniem (u nas mnożeniem) nazywamy grupą, gdy wskazane działanie jest łączne, czyli  $a(bc) = (ab)c$ , oraz istnieją w nim szczególnie elementy: element neutralny i dla każdego elementu można wskazać element odwrotny (dla liczby  $a$  odwrotnością jest  $1/a$ ). Więcej o grupach można przeczytać np. w  $\Delta_9^4$ .

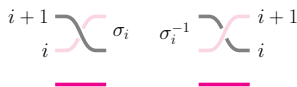




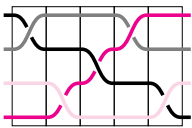
Rys. 2. Złożenie warkoczcy  $\sigma$  i  $\tau$

**Twierdzenie.** Zbiór warkoczcy na  $n$ -pasmach wraz z działaniem składania tworzy grupę (oznaczaną  $\mathbf{B}_n$ ). Grupa ta nie jest przemienna.

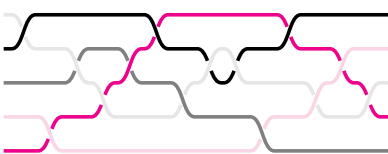
Odzworowanie grup  $f: \mathbf{B}_n \rightarrow S_n$ , przypisujące każdemu warkoczowi jego permutację indukowaną, spełnia warunek  $f(a * b) = f(a) \cdot f(b)$  dla  $a, b \in \mathbf{B}_n$ . Odzworowanie o tej własności nazywamy homomorfizmem.



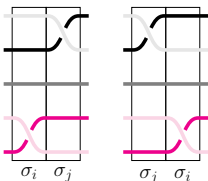
Rys. 3. Warkocz  $\sigma_i$  i odwrotny  $\sigma_i^{-1}$



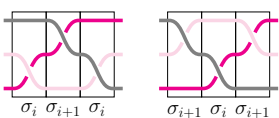
Rys. 4. Warkocz  $\sigma_3^{-1} * \sigma_1 * \sigma_2 * \sigma_3^{-1} * \sigma_1^{-1}$



Rys. 5. Zamiana kolejności pierwszych dwóch skrzyżowań (licząc od lewej) daje równoważny warkocz



Rys. 6. Przeploty pasm niezależnych – zamiana



Rys. 7. Przeploty sąsiednich pasm – zamiana

Rolę elementu neutralnego pełni  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Pozostaje jeszcze zastanowić się, jak uzyskać wynik złożenia  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ? Zaczynamy od wewnętrznej permutacji, która przesyła  $1 \rightarrow 2$ , z kolei zewnętrzna  $2 \rightarrow 2$ , więc łącząc te dwa warunki, dostajemy w wyniku  $1 \rightarrow 2$ . Podobnie postępując z 2 i 3, uzyskujemy permutację końcową. Warto zwrócić uwagę, że zamieniając permutacje miejscami, dostajemy inny wynik:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Oczywiście dla każdej permutacji z  $S_3$  możemy znaleźć permutację odwrotną, co pokazuje, że  $S_3$  ma strukturę grupy.

Podobnie jak w przypadku permutacji, w zbiorze warkoczcy na określonej liczbie pasm wprowadzamy działanie składania warkoczcy. Intuicyjnie można je rozumieć jako przedłużenie jednego warkoczcy drugim poprzez związanie pasm. Wyobraźmy sobie dwa identyczne walce z warkoczami wewnątrz o ustalonej liczbie pasm. Przyjmijmy, że końce pierwszego warkoczcy i początki drugiego występują dokładnie w tych samych miejscach na podstawach. Zestawiamy te walce tak, aby wskazane punkty się spotkały, i skleamy pasma na styku. Mamy więc walec o podwójnej długości ze zwiazanymi dwoma warkoczami. Znów mamy twór spełniający definicję warkoczcy geometrycznego, a tym samym wynik działania, co widać na rysunku 2.

Nietrudno zauważyć, że takie określenie spełnia aksjomaty grupy: zachodzi łączność, mamy warkocz neutralny o prostych pasmach i dla każdego warkoczcy możemy wskazać warkocz do niego odwrotny – odbicie lustrzane.

Zauważmy również, że permutacją indukowaną przez złożenie warkoczcy jest złożenie odpowiednich permutacji. Przykładowo, na rysunku 2 pierwszy z warkoczcy indukuje permutację  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , zaś drugi  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ . Ich złożenie to  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , czyli permutacja wyniku. Warto również zwrócić uwagę na to, że złożenie powyższych permutacji w odwrotnej kolejności da inny wynik. To pokazuje, że złożenie warkoczcy  $\sigma * \tau$  nie będzie tym samym co  $\tau * \sigma$ .

### Zapiszmy to słowami!

Aby usystematyzować opis warkoczcy, wprowadza się tak zwane *warkoczce elementarne*, czyli „cegiełki” budulcowe każdego warkoczcy. Precyzyjniej, warkoczem elementarnym  $\sigma_i$  nazywamy warkocz, w którym występuje tylko jedno przeplecenie:  $(i + 1)$ -sze pasmo przecina  $i$ -te (przechodząc ponad nim), a pozostałe pasma pozostają proste (rys. 3). Jego odwrotnością  $\sigma_i^{-1}$  jest warkocz elementarny, w którym  $i$ -te pasmo przechodzi ponad  $(i + 1)$ -szym. Odpowiednio „rozluźniając” sploty, możemy podzielić dowolny warkocz na segmenty, w których występuje tylko jedno przełożenie pasm odpowiadające konkretnemu warkoczowi elementarnemu (przykład na rysunku 4). Każdy warkocz możemy zatem przedstawić jako złożenie (połączenie) warkoczcy elementarnych. Taki opis (który nazywamy *słowem*) niestety nie jest jednoznaczny. Zastanówmy się, czy warkocz z rysunku 5 „bardzo” się zmienia, jeśli zamiast początkowego przełożenia pasm trzeciego i czwartego (od dołu) wykonać je najpierw na paśmie pierwszym i drugim? Biorąc pod uwagę giętkość i ciągłość, zmiana nie będzie istotna.

Jak zatem sprawdzić, kiedy różne słowa opisują ten sam warkocz? Problem ten rozstrzyga twierdzenie zaproponowane przez Artina i Magnusa. Wyróżnia ono trzy typy niejednoznaczności zapisu warkoczcy:

- Złożenie warkoczcy elementarnych  $\sigma_i * \sigma_i^{-1}$  oraz  $\sigma_i^{-1} * \sigma_i$  jest równoważne warkoczowi neutralnemu.
- Jeśli w warkoczach elementarnych  $\sigma_i$  oraz  $\sigma_j$  przeplecenia występują na niezależnych pasmach, tzn.  $|i - j| > 1$ , wówczas warkocz  $\sigma_i * \sigma_j$  jest równoważny warkoczowi  $\sigma_j * \sigma_i$  (przykład na rysunku 6).
- W przypadku gdy przeplecenia w warkoczach elementarnych  $\sigma_i$  oraz  $\sigma_j$  mają jedno wspólne pasmo (czyli  $j = i \pm 1$ ), to warkocz  $\sigma_i * \sigma_j * \sigma_i$  jest równoważny  $\sigma_j * \sigma_i * \sigma_j$ , co widać na rysunku 7.

Wspomniane twierdzenie orzeka, że jeśli dwa słowa kodują ten sam warkocz, to jedno z nich można uzyskać z drugiego poprzez zastosowanie operacji (a)–(c).

Niestety twierdzenie to nie daje algorytmicznej formuły na rozwiązanie tego zadania.

### Problem słów – algorytmy

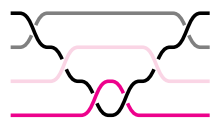
Przedstawione algorytmy są dalekie od optymalnych dla komputera i w praktyce raczej ustępują miejsca innym.



Rys. 8. Warkocze:  $\beta$  (z lewej) i  $\gamma_1$  (z prawej)



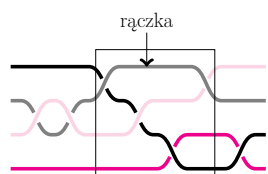
Rys. 9. Warkocz  $\alpha_1$



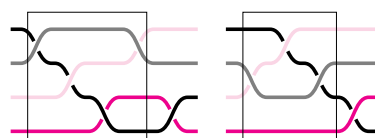
Rys. 10. Warkocz  $\alpha_1$  po naciągnięciu pasm



Rys. 11. Postać normalna warkocza  $\beta$



Rys. 12. Warkocz zawierający rączkę



Rys. 13. Rączka (na trzecim paśmie) przed (po lewej) i po redukcji (po prawej)

Czasem codzienność wymusza od nas syzyfową pracę rozplątywania różnych rzeczy, chociażby kabli. W przypadku warkoczy orzeczenie, czy być może skomplikowana płatanina rzeczywiście coś splotła czy nie, jest zagadnieniem z kombinatorycznej teorii grup zwanym *problemem słów*. W dalszej części przyjrzymy się metodom rozstrzygania go. Ograniczymy naszą uwagę do *warkoczy czystych*, czyli takich, które indukują permutację identycznościową (tzn. nie zmieniają układu końców). Innych warkoczy nie ma sensu rozpatrywać, ponieważ nie mogą być równoważne z neutralnym.

W 1926 roku ukazał się artykuł Emila Artina „Theorie der Zöpfe”, w którym przedstawił on algorytm „czesania” (porządkowania kolejności przepleceń) warkoczy. Weźmy warkocz czysty  $\beta$  o  $n$  pasmach i rozczesmy go w następujący sposób:

1. Tworzymy kopię warkocza  $\beta$  i usuwamy z niej pierwsze pasmo od góry, zastępując je prostym. Otrzymany w ten sposób warkocz nazywamy  $\gamma_1$  (rys. 8).
2. Rozważmy złożenie  $\alpha_1 = \beta * \gamma_1^{-1}$  (rys. 9). Gdybyśmy zabrali pierwsze od góry pasmo z  $\alpha_1$ , to pozostałe pasma moglibyśmy rozplatać. W tej sytuacji, posługując się operacjami (a)–(c), możemy doprowadzić  $\alpha_1$  do równoważnej postaci, w której w każdym przepleceniu bierze udział pierwsze pasmo (rys. 10). Nasz wyjściowy warkocz możemy zapisać jako  $\beta = \alpha_1 * \gamma_1$ . Wówczas w jego pierwszej części ( $\alpha_1$ ) w każdym przepleceniu bierze udział pierwsze pasmo i nie bierze ono udziału w żadnym przepleceniu pozostałej części warkocza.
3. Procedurę opisaną w krokach 1 i 2 powtarzamy dla warkocza  $\gamma_1$ .
4. Po odpowiedniej liczbie powtórzeń otrzymujemy rozkład  $\beta = \alpha_1 * \dots * \alpha_{n-1}$ , w którym każdy z segmentów  $\alpha_i$  jest „wyczesany” (tzn. w jego przepleceniach bierze udział tylko  $i$ -te pasmo od góry, rys. 11).

Tak uzyskany „wyczesany” rozkład nazywamy *postacią normalną*. Dla każdego warkocza istnieje dokładnie jeden „wyczesany” warkocz, w którym wszystkie  $\alpha_i$  są zredukowane zgodnie z relacjami. Jak łatwo się domyślić, badany warkocz jest równoważny neutralnemu wtedy i tylko wtedy, gdy po czesaniu jest neutralny (ma proste pasma).

Przyjrzymy się teraz drugiej metodzie rozstrzygania problemu słów w grupie warkoczy, zaproponowanej przez Patricka Dehornoya w 1997 roku. *Redukcja rączek* polega na wskazaniu podwarkoczy określonego typu, tzw. rączek, które stopniowo opuszczane za pomocą pewnego odwzorowania (homomorfizmu) rozplatają warkocz, a tym samym pozwalają na sprawdzenie jego neutralności. Formalnie, *rączką* nazywamy podwarkocz postaci  $\sigma_i^e * x * \sigma_i^{-e}$ , gdzie  $e = \pm 1$ , a  $x$  złożony jest tylko z generatorów  $\sigma_j^{\pm 1}$  przy  $j < i$ , rysunek 12 tłumaczy nazwę. Podobnie jak poprzednio, będziemy rozpatrywać warkocze czyste. Przesuwając się od początku warkocza po lewej znajdujemy pierwszą rączkę i opuszczamy ją (rys. 13). W otrzymanym warkoczu również szukamy rączki itd., aż do wyczerpania dostępnych rączek. W zależności od tego, czy końcowy warkocz jest neutralny czy też nie, dostajemy odpowiedź. Nie ma obawy, że zmienimy warkocz w trakcie przeprowadzania redukcji, ponieważ korzystamy tylko z operacji dozwolonych (wskazanych przez twierdzenie Artina i Magnusa). Z algorytmicznego punktu widzenia sytuacja również jest dobra, ponieważ algorytm redukcji nigdy się nie zapętli.

*Imponujący warkocz podskakuje w rytm przytupów – wybór krawata to nie błaha sprawa. Sprzedawca pokazuje kolejno różne modele, jednak matematyk nieustannie obserwuje zwinnie tworzone węzły, do Windsora kolejno dołącza four-in-hand, eldredge i Shelby... Wreszcie kupuje siedem z nich – nie tylko dla urozmaicenia dni, ale i zabawy. Skoro da się opisać warkocze, to czemu by nie spróbować z węzłami?*