Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2019

Zadania z matematyki nr 785, 786

Redaguje Marcin E. KUCZMA

785. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg o środku O; przy tym $|BC| = |CD|$. Przekątne AD i CE są prostopadłe, zaś przekątne AD i BE przecinają się w takim punkcie P, że $|AP| = |AO|$. Wykazać, że trójkąt BCP jest równoboczny.

786. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele czwórek różnych liczb naturalnych (a, b, c, d) o tej własności, że każdy z iloczynów ab, bc, ac, bd, cd jest o 1 większy od kwadratu pewnej liczby naturalnej.

Zadanie 786 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2019

Przypominamy treść zadań:

781. Dla ustalonych liczb rzeczywistych $b > a > 0$ oraz parzystej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyznaczyć kres górny wartości stosunku A/H, gdzie A i H to (odpowiednio) średnia arytmetyczna i średnia harmoniczna n liczb, wybranych dowolnie z przedziału $[a, b]$.

782. Dany jest trójkąt ABC, w którym wysokość opuszczona z wierzchołka C ma długość h. Na każdym odcinku CT, łączącym wierzchołek C z bokiem AB, odkładamy odcinek TP ustalonej długości $d < h$. Uzyskane w ten sposób punkty P tworzą pewną krzywą. Czy – jeśli liczba d jest dostatecznie mała – długość owej krzywej przekroczy długość boku AB?

781. Rozważamy średnie A i H liczb $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$. Weźmy dowolną liczbę $c > 0$ i zauważmy, że

$$(1)\qquad \frac{A}{H} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{c}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{c}{x_i}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{c} + \frac{c}{x_i}\right)\right)^2$$

– skorzystaliśmy z nierówności $4\alpha\beta \leqslant (\alpha+\beta)^2$ dla liczb $\alpha = \sum x_i/c$, $\beta = \sum c/x_i$.

Dla $x \in [a, b]$ mamy nierówność $(x-a)(x-b) \leqslant 0$, którą przepisujemy w postaci

$$x + \frac{ab}{x} \leqslant a + b$$

i dalej, dzieląc przez $\sqrt{ab}$:

$$(2)\qquad \frac{x}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{x} \leqslant \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\,.$$

Kontynuujemy szacowanie (1), przyjmując $c = \sqrt{ab}$ i korzystając z (2):

$$\frac{A}{H} \leqslant \frac{1}{4n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{x_i}\right)\right)^2 \leqslant \frac{1}{4n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4ab}\,.$$

Liczba n jest z założenia parzysta. Gdy $x_i = a$ dla połowy spośród wskaźników $i = 1, \ldots, n$, zaś $x_i = b$ dla pozostałej połowy, wówczas we wszystkich szacowaniach zachodzi równość. Zatem liczba $(a+b)^2/4ab$ jest maksymalną wartością stosunku A/H.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 775 ($WT = 1{,}41$) i 776 ($WT = 2{,}88$) z numeru 2/2019

Witold Bednarek	Łódź	43,07
Jerzy Cisło	Wrocław	42,92
Paweł Najman	Kraków	41,10
Paweł Kubit	Kraków	40,81
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	40,74
Krzysztof Kamiński	Pabianice	38,73
Michał Koźlik	Gliwice	35,73
Janusz Fiett	Warszawa	31,23

782. Odpowiedź: nie. Uzasadnienie: długość krzywej to kres górny długości linii łamanych w nią wpisanych. Weźmy więc dowolną łamaną, wpisaną w rozważaną krzywą (utworzoną dla pewnego parametru $d \in (0, h)$); jej wierzchołki $P_0, P_1, \ldots, P_n$ leżą (w takim porządku) na owej krzywej, przy czym $P_0 \in AC$, $P_n \in BC$. Przedłużenia odcinków CP_i docierają do boku AB w punktach T_i. Ustalmy $i > 0$ i spójrzmy na czworokąt $P_{i-1}T_{i-1}T_iP_i$, którego boki $P_{i-1}T_{i-1}$ oraz T_iP_i mają długość d. Przyjmijmy, że punkt P_i jest nie mniej oddalony od prostej AB niż punkt P_{i-1} (gdy jest przeciwnie, zamieniamy role wskaźników $i-1$ oraz i). Niech punkt Q_i uzupełnia równoległobok $P_{i-1}T_{i-1}T_iQ_i$. Skoro półproste $T_{i-1}P_{i-1}^{\rightarrow}$, $T_iP_i^{\rightarrow}$ spotykają się (w punkcie C), odcinek T_iP_i przecina odcinek $P_{i-1}Q_i$. Trójkąt $P_iQ_iT_i$ jest równoramienny, jego osią symetrii jest symetralna odcinka P_iQ_i. Punkt P_{i-1} leży po tej stronie owej symetralnej co punkt P_i – zatem bliżej punktu P_i niż punktu Q_i. Tak więc $|P_{i-1}P_i| < |P_{i-1}Q_i| = |T_{i-1}T_i|$.

Taka nierówność zachodzi dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, wobec czego łamana $P_0P_1 \ldots P_n$ jest krótsza niż bok AB. Biorąc kres górny długości wszystkich takich łamanych, wpisanych w rozważaną krzywą, stwierdzamy, że jej długość nie przekracza długości boku AB.

[Korzystając ze wzoru całkowego na długość krzywej (najwygodniej we współrzędnvch biegunowych ze środkiem C), nietrudno się przekonać, że długość badanej krzywej jest ściśle malejącą funkcją parametru $d < h$. Dla $d = 0$ ta krzywa to odcinek AB; dla $0 < d < h$ jej długość jest więc ostro mniejsza niż $|AB|$.]

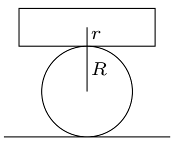
Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2019

Zadania z fizyki nr 682, 683

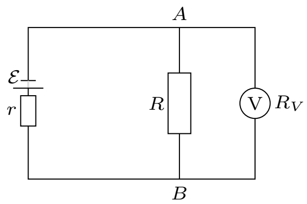
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

682. Na nieruchomym, poziomym walcu o promieniu R leży walec o promieniu r, również poziomo (rys. 1). Osie walców są wzajemnie prostopadłe. Przy jakim stosunku promieni równowaga górnego walca będzie trwała? O jaki maksymalny kąt można przy tym odchylić od poziomu górny walec? Współczynnik tarcia między walcami jest równy μ.



Rys. 1

683. W obwodzie przedstawionym na rysunku 2 opór zewnętrzny R jest dużo większy niż opór wewnętrzny ogniwa: $r \ll R$. Podłączenie woltomierza o oporze R_V powoduje zmianę napięcia między punktami A i B. Jaka powinna być relacja między oporami R i R_V, aby to zaburzenie było jak najmniejsze?



Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 5/2019

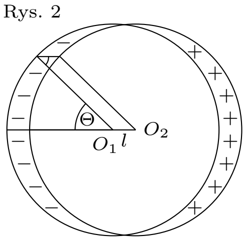
Przypominamy treść zadań:

678. Dielektryczna kula spolaryzowana jest jednorodnie, to znaczy momenty dipolowe wszystkich cząsteczek są równe i wzajemnie równoległe.

(a) Znaleźć natężenie pola elektrycznego wewnątrz dielektryka, jeżeli w jednostce objętości znajduje się N cząsteczek, z których każda ma moment dipolowy $p = ql$. Odległość l między ładunkami dipola jest dużo mniejsza od promienia kuli.

(b) Znaleźć gęstość powierzchniową ładunków indukowanych na powierzchni kuli.

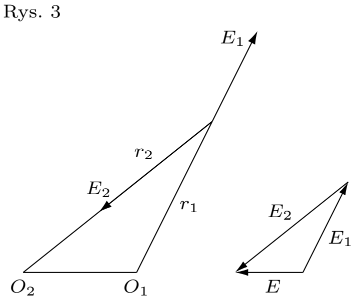
679. Na gładkim lodzie zderzają się sprężyście dwa jednakowe okrągłe kamienie do gry w curling, z których jeden początkowo spoczywa, a drugi porusza się ruchem postępowym. Prosta przechodząca przez środki kamieni podczas zderzenia tworzy kąt $\alpha = \pi/3$ z wektorem prędkości początkowej poruszającego się kamienia. Znaleźć maksymalną część energii układu, która podczas zderzenia przechodzi w energię sprężystej deformacji. Nie ma tarcia między kamieniami.



Rys. 3

678. W wyniku polaryzacji ładunki cząsteczek dielektryka rozsunęły się (rys. 3). Wewnątrz kuli o środku w punkcie O_1 znajdują się ładunki ujemne, wewnątrz kuli o środku w punkcie O_2 ładunki dodatnie. Gęstość objętościowa ładunków $\rho = Nq$. Odległość między środkami kul jest równa l. Natężenie pola w dowolnym punkcie w obszarze, w którym kule nachodzą na siebie, jest sumą wektorową natężeń od obu kul (rys. 4).

$$E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi r_i^3 \rho}{3r_i^2} = \frac{\rho r_i}{3\varepsilon_0}, \quad \text{gdzie } i = 1, 2.$$



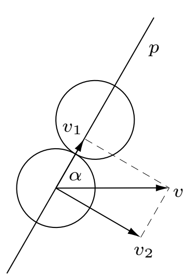
Rys. 4

Wypadkowe pole jest jednorodne, ma wartość $E = \rho l/(3\varepsilon_0)$ i zwrot przeciwny do wektora $\boldsymbol{p}$

$$\boldsymbol{E} = -N\boldsymbol{p}/(3\varepsilon_0).$$

Ponieważ $l \ll R$, gdzie R jest promieniem kuli, szukana gęstość ładunków powierzchniowych dana jest wzorem (rys. 3):

$$\sigma = \rho l \cos\Theta = Np\cos\Theta.$$



Rys. 5

679. Rozłóżmy prędkość v poruszającego się kamienia na składowe: $v_1 = v\cos\alpha = v/2$ wzdłuż prostej p przechodzącej przez środki obu kamieni podczas zderzenia i prostopadłą do niej $v_2 = v\sin\alpha = v\sqrt{3}/2$ (rys. 5). Gdy deformacja jest maksymalna, prędkości kamieni w kierunku p wyrównują się. Oznaczając ich wartość przez v_3, mamy z zasady zachowania pędu $mv_1 = 2mv_3$, gdzie m jest masą kamienia, stąd $v_3 = v_1/2$. Zasada zachowania energii ma postać:

$$m(v_1^2 + v_2^2)/2 = mv_3^2/2 + m(v_3^2 + v_2^2)/2 + E_s,$$

gdzie E_s jest maksymalną energią sprężystej deformacji, a jej wartość $E_s = mv^2/16$. Całkowita energia układu $E = mv^2/2$, stąd $E_s/E = 1/8$.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.