Klub 44 M

Rozwiązania zadań z numeru 4/2019

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

779. W pola planszy kwadratowej wpisujemy liczby całkowite (w każde pole jedną liczbę) tak, by liczby wpisane w dowolne dwa przyległe pola były równe lub różniły się o 1 (pola przyległe mają wspólny bok). Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć największą liczbę m taką, że przy każdym wypełnieniu planszy $n \times n$, zgodnym z podanym warunkiem, pewna liczba pojawia się na co najmniej m polach planszy.

780. Ciąg $x_0, x_1, x_2, \ldots$ jest określony wzorami: $x_0 = 1$,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \qquad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n - \sqrt{2n}\right)$ lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

779. Odpowiedź: maksymalna wartość m, o jakiej mowa, to $m = n$. Macierz $[a_{ij}]$ o wyrazach $a_{ij} = i + j - 1$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ daje przykład wypełnienia planszy, przy którym liczba n pojawia się n razy (cała jedna przekątna), a żadna liczba nie występuje więcej niż n razy. Pozostaje wykazać, że przy każdym wypełnieniu planszy, zgodnym z podanym warunkiem, pewna liczba wystąpi $\geqslant n$ razy.

Weźmy pod uwagę dowolne takie wypełnienie i niech m_k oraz M_k oznaczają najmniejszą oraz największą liczbę w kolumnie k. Liczby w sąsiednich polach różnią się co najwyżej o 1, więc w k-tej kolumnie są wszystkie liczby całkowite z przedziału $[m_k, M_k]$.

Gdy $\max\{m_1, \ldots, m_n\} \leqslant \min\{M_1, \ldots, M_n\}$, wówczas pewna liczba całkowita należy do wszystkich przedziałów $[m_1, M_1], \ldots, [m_n, M_n]$. Jest ona obecna we wszystkich kolumnach, więc występuje $\geqslant n$-krotnie na planszy.

Gdy zaś $\max\{m_1, \ldots, m_n\} > \min\{M_1, \ldots, M_n\}$, znaczy to, że dla pewnych numerów kolumn k, l zachodzi nierówność $m_k \leqslant M_k < m_l \leqslant M_l$. Weźmy dowolny wiersz. Na przecięciu z kolumnami k i l są w tym wierszu: pewna liczba $\leqslant M_k$ oraz pewna liczba $\geqslant m_l$; zatem są w tym wierszu wszystkie liczby całkowite z przedziału $[M_k, m_l]$. Wiersz był dowolny, czyli każda z tych liczb (np. M_k) jest obecna we wszystkich wierszach – występuje wobec tego $\geqslant n$ razy. To uzasadnia odpowiedź.

780. Podaną równość rekurencyjną podnosimy stronami do kwadratu (zastępując literkę n literką k) i dostajemy równoważną zależność

$$x_{k+1}^2 - x_k^2 = 2 + x_k^{-2}.$$

Dodajemy te równości dla $k = 0, \ldots, n-1$, otrzymując

$$x_n^2 - 1 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} x_k^{-2}. \tag{1}$$

Stąd od razu widać, że $x_n > \sqrt{2n}$ (dla $n > 0$), i wobec tego

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k^{-2} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} x_k^{-2} < 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2} H_{n-1}, \tag{2}$$

gdzie – jak zwykle – H_m oznacza sumę odwrotności liczb naturalnych od 1 do m. Zależności (1) i (2) dają oszacowanie

$$x_n^2 < 2n + 2 + \frac{1}{2} H_{n-1}.$$

Skoro $x_n > \sqrt{2n}$, mamy stąd

$$0 < x_n - \sqrt{2n} = \frac{x_n^2 - 2n}{x_n + \sqrt{2n}} < \frac{x_n^2 - 2n}{2\sqrt{2n}} < \frac{2 + \frac{1}{2} H_{n-1}}{2\sqrt{2n}}. \tag{3}$$

Liczby uzyskane po prawej stronie tworzą ciąg zbieżny do zera; wynika to na przykład ze znanej równości asymptotycznej $H_n \sim \ln n$; albo – bardziej elementarnie – z nierówności $H_n < 3n^{1/3}$ (nietrudnej do wykazania przez indukcję). Dwustronne oszacowanie (3) pokazuje, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_n - \sqrt{2n}\right) = 0.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 773 ($WT = 1{,}78$) i 774 ($WT = 1{,}87$) z numeru 1/2019

Witold Bednarek	Łódź	41,66
Jerzy Cisło	Wrocław	41,51
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	40,74
Paweł Najman	Kraków	39,69
Paweł Kubit	Kraków	39,40
Krzysztof Kamiński	Pabianice	37,32
Michał Koźlik	Gliwice	35,73

Klub 44 F

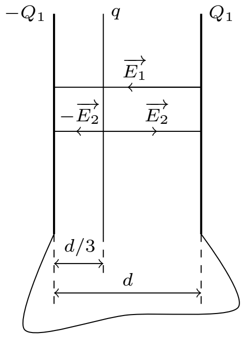
Rozwiązania zadań z numeru 4/2019

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Przypominamy treść zadań:

676. Między zwartymi drutem okładkami nienaładowanego kondensatora płaskiego znajduje się punktowy ładunek q. Powierzchnia okładek jest bardzo duża, efekty brzegowe możemy zaniedbać. Odległość ładunku od jednej z okładek jest równa $d/3$, gdzie d jest odległością między okładkami. Jaki ładunek przepłynie przez przewodnik zwierający okładki, gdy ładunek q zostanie przesunięty w miejsce wewnątrz kondensatora, odległe o $d/3$ od drugiej okładki?

677. Oszacuj, jaki musi być minimalny promień planety, aby mogła ona utrzymać atmosferę składającą się głównie z tlenu i azotu, jeśli temperatura powierzchni planety $T = 300$ K. Średnia gęstość planety $\rho = 4 \cdot 10^3$ kg/m^3.



676. Ponieważ okładki kondensatora są bardzo duże, wartość indukowanych na nich ładunków nie zmienia się podczas przemieszczania ładunku q równolegle do okładek (zmienia się tylko ich rozkład). Oznacza to, że wartość ładunków indukowanych nie zmieni się również wtedy, gdy ładunek q zostanie równomiernie „rozmazany" na powierzchni równoległej do okładek kondensatora (rysunek). Ładunki Q_1 i $-Q_1$ wytwarzają między okładkami kondensatora jednorodne pole o natężeniu $E_1 = Q_1/(\varepsilon_0 S)$, gdzie S jest powierzchnią okładek. Płaszczyzna wewnątrz kondensatora naładowana ładunkiem q wytwarza pole o natężeniu $E_2 = q/(2\varepsilon_0 S)$. Napięcie między płaszczyzną naładowaną ładunkiem q a lewą okładką wynosi $U_1 = (E_1 + E_2)d/3$, napięcie między tą samą płaszczyzną i prawą okładką $U_2 = 2d(E_2 - E_1)/3$. Jednocześnie napięcie między okładkami zwartego kondensatora wynosi 0, stąd $U_1 = U_2$, $3E_1 = E_2$, $Q_1 = q/6$. Analogicznie ładunek na prawej okładce po przesunięciu ładunku q w położenie końcowe jest równy $Q_1' = -q/6$. Szukany ładunek przepływający między okładkami kondensatora podczas przemieszczania ładunku punktowego q dany jest wzorem $\Delta q = Q_1 - Q_1' = q/3$.

677. Cząsteczka wchodząca w skład atmosfery jest utrzymywana w bezpośrednim sąsiedztwie planety, gdy jej energia całkowita spełnia warunek $\frac{m}{2}\langle v^2\rangle - \frac{GmM}{r} \leqslant 0$, gdzie m jest masą cząsteczki, $\langle v^2\rangle$ średnim kwadratem jej prędkości, G stałą grawitacji, M masą planety oraz r jej promieniem. Korzystając ze związku między masą a gęstością planety, otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$\langle v^2\rangle \approx \frac{8\pi}{3} G\rho r_{min}^2.$$

Z drugiej strony, średni kwadrat prędkości cząsteczki gazu związany jest z jego temperaturą T zależnością $\langle v^2\rangle = \frac{3kT}{m} = \frac{3RT}{\mu}$, gdzie k jest stałą Boltzmanna, R stałą gazową, μ masą molową gazu. Stąd

$$r_{min} \approx \sqrt{\frac{9RT}{8\pi G\rho\mu}}.$$

Ponieważ masa molowa azotu jest mniejsza od masy molowej tlenu, w celu naszego oszacowania możemy przyjąć, że atmosfera składa się tylko z azotu, którego masa molowa $\mu_N = 28$ g/mol. Ostatecznie $r_{min} \approx 300$ km.

Powyższe oszacowanie uwzględnia jedynie wartość średniej kwadratu prędkości. W rzeczywistości cząsteczki gazu poruszają się z różnymi prędkościami (rozkład Maxwella), co oznacza, że część cząsteczek ma prędkości powyżej średniej i te będą mogły uciec od planety o minimalnym wyznaczonym powyżej promieniu. W bardziej dokładnym oszacowaniu poszukiwany minimalny promień będzie więc większy.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 670 ($WT = 2{,}35$), 671 ($WT = 1{,}75$) 672 ($WT = 2{,}35$), 673 ($WT = 3{,}77$) z numerów 1/2019 i 2/2019

Marian Łupieżowiec	Gliwice	44,03
Tomasz Rudny	Poznań	40,98
Jan Zambrzycki	Białystok	39,90
Tomasz Wietecha	Tarnów	38,43
Krzysztof Magiera	Łosiów	31,73
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Mateusz Kapusta	Wrocław	29,09
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Michał Koźlik	Gliwice	27,47

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.