Gdy zadaniu nie podołasz, to załatwi je niezmiennik

Bartłomiej BZDĘGA

Niezmiennikiem nazywamy tę własność obiektów, która zostaje zachowana po poddaniu ich wybranym przekształceniom. Jeśli chcemy wykazać, że obiekt X nie może zostać przekształcony w obiekt Y za pomocą danych reguł, to wystarczy znaleźć ich niezmiennik, który przyjmuje różne wartości dla obiektów X i Y.

Aby to wyjaśnić, rozwiążemy następujące zadanie: *Czy goniec szachowy może za pomocą legalnych ruchów dostać się z pola B2 na pole H7?*

Goniec porusza się po liniach skośnych, więc kolor pola, na którym stoi, pozostaje bez zmian. Pole B2 jest czarne, natomiast pole H7 jest białe. Z tego wynika negatywna odpowiedź na postawione pytanie.

W tym przykładzie przekształceniami są ruchy gońca, rozważanym obiektem jest pole, na którym on stoi (na początku B2, na końcu H7), a niezmiennikiem – kolor tego pola.

Zadania

1. Czy w wyrażeniu $1+2+3+\ldots+10$ można zamienić niektóre znaki „+" na „−" w ten sposób, by wynik był równy 0?
2. Na tablicy napisano 15 trzycyfrowych liczb pierwszych. Możemy zmazać dwie zapisane na tablicy liczby i zamiast nich zapisać wartość bezwzględną ich różnicy. Postępujemy tak aż do momentu, gdy na tablicy pozostanie jedna liczba. Czy tą liczbą może być 44?
3. W kręgu stoi 16 drzew, na każdym siedzi jeden wróbel. Wróble przelatują czasem na inne drzewa, ale zgodnie z regułą: dwa wróble lecą jednocześnie, każdy na drzewo sąsiadujące z tym, na którym siedział, jeden zgodnie, a drugi przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Czy jest możliwe, aby w pewnej chwili wszystkie wróble siedziały na tym samym drzewie?
4. Jedno dziecko ma 10 cukierków, drugie 15, a trzecie 20. Każde z nich może w dowolnej chwili dać po jednym swoim cukierku pozostałej dwójce. Czy dzieląc się w ten sposób, dzieci mogą doprowadzić do tego, by każde z nich miało 15 cukierków?
5. W punktach $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ i $(1,0)$ stoją pionki. Dozwolony ruch polega na wyborze dwóch pionków, a następnie przestawieniu jednego z nich na punkt płaszczyzny symetryczny względem punktu zajmowanego przez drugi pionek. Czy jest możliwe, aby po pewnej liczbie ruchów dwa pionki stanęły w tym samym miejscu?
6. Pionki stoją w punktach $(0,0)$, $(0,1)$ i $(1,0)$, reguły postępowania takie jak w poprzednim zadaniu. Rozstrzygnąć, czy możliwe jest ustawienie pionków w wierzchołkach trójkąta, we wnętrzu którego znajduje się punkt o obu współrzędnych całkowitych.
7. Na każdym polu szachownicy 8×8 stoi pionek. Jeżeli na pierwszym i trzecim z trzech kolejnych pól leżących w jednym wierszu, kolumnie lub diagonali stoi co najmniej jeden pionek, to możemy wziąć z nich po jednym pionku i przełożyć na drugie z tych pól. Rozstrzygnąć, czy można, wykonując takie ruchy, przełożyć wszystkie pionki na jedno pole.
8. Na polu A1 szachownicy 8×8 napisano liczbę 1, na A8 napisano -1, a na pozostałych polach 0. Możemy wielokrotnie wykonywać następującą operację: wybieramy dowolne pole i zmniejszamy napisaną na nim liczbę o liczbę pól sąsiednich (mających wspólny bok), zaś każdą z liczb napisanych na polach sąsiednich zwiększamy o 1. Rozstrzygnąć, czy można doprowadzić do stanu, w którym na wszystkich polach szachownicy napisana jest liczba 0.
9. Płaszczyznę podzielono na trójkąty równoboczne w ten sposób, że w każdym wierzchołku (węźle) spotyka się sześć trójkątów. W każdym węźle znajduje się lampka, natomiast na każdym trójkącie jest włącznik, który zmienia stan lampek (świeci albo nie świeci) znajdujących się w węzłach będących wierzchołkami tego trójkąta. Rozstrzygnąć, czy zaczynając od sytuacji, w której świeci się dokładnie jedna lampka, możemy doprowadzić do zgaszenia wszystkich lampek.

Wskazówki do zadań

1. Jeśli zamienimy „$+k$" na „$-k$", to wartość całego wyrażenia zmaleje o $2k$, więc nie zmieni się jego parzystość. Początkowa suma jest nieparzysta, więc niemożliwe jest osiągnięcie wartości parzystej.
2. Liczby a i b zastępujemy liczbą $|a-b|$, więc suma liczb na tablicy zmniejsza się o $a+b-|a-b| = 2\min\{a,b\}$, czyli nie zmienia się jej parzystość.
3. Ponumerujmy drzewa kolejno liczbami od 1 do 16. Każdemu wróblowi przypisujemy jego pozycję, czyli numer drzewa, na którym siedzi. Należy zauważyć, że suma pozycji wszystkich wróbli może się zmienić jedynie o wielokrotność 16, więc nie zmienia się jej reszta z dzielenia przez 16.
4. Niech a, b, c oznaczają liczby cukierków dzieci. Należy zauważyć, że wartość wyrażenia $b-a$ może się zmienić jedynie o wielokrotność 3, więc ma ono stałą resztę z dzielenia przez 3.
5. Odbijając punkt A symetrycznie względem punktu S, otrzymamy taki punkt A', którego obie współrzędne są tej samej parzystości, co odpowiednie współrzędne punktu A.
6. Niezmiennikiem jest pole trójkąta wyznaczonego przez pionki. Pole trójkąta o wierzchołkach kratowych, w którego wnętrzu jest punkt kratowy, wynosi co najmniej 3/2 (dlaczego?).
7. Podczas przestawiania pionków nie ulega zmianie (odpowiednio zdefiniowany!) „środek ciężkości" rozgrywki.
8. Wykonując tę operację, nie zmieniamy parzystości sumy liczb wpisanych na wybranej przekątnej szachownicy.
9. Podzielmy płaszczyznę na sześciokąty, każdy złożony z sześciu przełączników. Usuńmy lampki znajdujące się w środkach tych sześciokątów. Wówczas parzystość liczby zaświeconych lampek będzie stała.