Trzy rodzaje indukcji matematycznej

Bartłomiej BZDĘGA

Dodając obustronnie $n+1$ do równości $1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$, dowodzimy implikacji

$$\underbrace{1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)}_{T(n)} \quad\Rightarrow\quad \underbrace{1+2+\ldots+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}_{T(n+1)}.$$

Zwróćmy uwagę, że druga równość jest analogiczna do pierwszej, z tą jedynie różnicą, że każde n zostało zastąpione przez $n+1$. To tłumaczy nazwy $T(n)$ i $T(n+1)$, które zostały tym równościom nadane.

Zauważmy, że $T(1)$ jest równością prawdziwą: $1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2$. Wyżej udowodniona implikacja dla $n=1$ ma postać $T(1)\Rightarrow T(2)$, zatem i równość $T(2)$ jest prawdziwa. Następnie biorąc $n=2$, wnioskujemy prawdziwość $T(3)$ i tak dalej, przez cały zbiór liczb naturalnych. To oznacza, że $T(n)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdego naturalnego n.

Powyższe rozumowanie jest przykładem dowodu przez indukcję. Ogólniej, *zasada indukcji matematycznej* mówi, że jeśli chcemy wykazać prawdziwość jakiegoś stwierdzenia $T(n)$ dla wszystkich liczb naturalnych $n\geqslant n_0$ (zwykle $n_0=1$), to wystarczy udowodnić $T(n_0)$ (baza indukcji), a następnie dla wszystkich naturalnych $n\geqslant n_0$ dowieść, że $T(n)\Rightarrow T(n+1)$ (krok indukcji; stwierdzenie $T(n)$ nazywamy tu założeniem indukcyjnym, a $T(n+1)$ – tezą indukcyjną).

Przedstawiamy poniżej jeszcze dwa rodzaje indukcji. Indukcję o głębokości $d>1$ stosujemy w zadaniach 3 i 8, a silną indukcję w zadaniach 9 i 10.

Indukcja o głębokości d. Bazę indukcji stanowią stwierdzenia $T(n_0), T(n_0+1), \ldots, T(n_0+d-1)$, a w kroku indukcyjnym dowodzimy implikacji $T(n)\wedge T(n+1)\wedge\ldots\wedge T(n+d-1)\Rightarrow T(n+d)$ dla $n\geqslant n_0$.

Silna indukcja. Bazą jest stwierdzenie $T(n_0)$, a krokiem indukcyjnym $T(n_0)\wedge T(n_0+1)\wedge\ldots\wedge T(n-1)\Rightarrow T(n)$ dla $n>n_0$.

Zadania. (*Uwaga.* Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną.)

1. Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnić przez indukcję, że:
   (a) $3^n+4^n<5^n$ dla $n\geqslant 3$, (b) $12\mid 7^n+6n-1$.
2. Udowodnić nierówność Bernoulliego: $(1+x)^n>1+nx$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $x\geqslant -1$ i liczb naturalnych n.
3. Wiadomo, że $a_1=5$, $a_2=13$ oraz $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ dla $n\geqslant 1$. Wykazać, że $a_n=2^n+3^n$ dla wszystkich naturalnych n.
4. Dowieść, że $n\geqslant 1$ różnych okręgów dzieli płaszczyznę na co najwyżej n^2-n+2 obszarów.
5. Nazwijmy L-ką figurę złożoną z trzech kwadratów jednostkowych, w kształcie litery L. Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnić, że szachownicę o wymiarach $2^n\times 2^n$ z jednym usuniętym polem można rozciąć na L-ki.
6. Udowodnić małe twierdzenie Fermata: $p\mid n^p-n$ dla każdej liczby pierwszej p i liczby naturalnej n.
7. Niech n będzie liczbą naturalną. Dowieść, że istnieje n-cyfrowa wielokrotność liczby 2^n, w której zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry 1 i 2.
8. Wykazać, że dla $n\geqslant 7$ możemy tak umieścić w wierzchołkach n-kąta foremnego różne liczby od 1 do n, by wartość bezwzględna różnicy liczb z każdych dwóch sąsiednich wierzchołków była kwadratem liczby naturalnej.
9. Na stole leży $n\geqslant 1$ stosów monet, po jednej w każdym. W danej chwili możemy połączyć dwa dowolnie wybrane stosy w jeden. Jeśli połączymy stos a monet ze stosem b monet, to zapisujemy iloczyn ab. Te czynności wykonujemy aż do uzyskania jednego stosu n monet. Dowieść, że suma zapisanych iloczynów wynosi $\frac{1}{2}n(n-1)$.
10. Każdą liczbę naturalną pomalowano pewnym kolorem w taki sposób, że jeśli $a,b\geqslant 2$ są liczbami naturalnymi, to liczby $a+b$ i ab mają ten sam kolor. Dowieść, że wszystkie liczby naturalne większe od 4 mają ten sam kolor.

Wskazówki do zadań

Uwaga. Wskazówki dotyczą tego, jak przeprowadzić krok indukcyjny. Trzeba jednak pamiętać, że nie wolno pominąć bazy indukcji!

1. (a) Założenie indukcyjne $3^n+4^n<5^n$ należy obustronnie pomnożyć przez 5. Otrzymamy wtedy nierówność, z której łatwo wydedukować tezę indukcyjną: $3^{n+1}+4^{n+1}<5^{n+1}$. (b) Z założenia indukcyjnego $12\mid 7^n+6n-1$ wynika, że $7^n=12a-6n+1$ dla pewnego $a\in\mathbb{N}$. Mamy udowodnić, że 12 jest dzielnikiem liczby $7^{n+1}-6(n+1)-1=$ $=7\cdot 7^n-6(n+1)-1$.

2. Trzeba pomnożyć obie strony założenia indukcyjnego $(1+x)^n\geqslant 1+nx$ przez liczbę dodatnią $1+x$, następnie wystarczy udowodnić, że $(1+nx)(1+x)\geqslant 1+(n+1)x$.

3. Używamy indukcji o głębokości 2. Założenie indukcyjne $a_n=2^n+3^n\wedge a_{n+1}=2^{n+1}+3^{n+1}$ należy wykorzystać we wzorze rekurencyjnym z treści zadania w celu otrzymania tezy indukcyjnej $a_{n+2}=2^{n+2}+3^{n+2}$.

4. Należy zauważyć i uzasadnić, że jeśli mamy n okręgów na płaszczyźnie, to po dorysowaniu jeszcze jednego liczba obszarów wzrośnie o co najwyżej $2n$.

5. Podzielmy szachownicę o wymiarach $2^{n+1}\times 2^{n+1}$ z usuniętym polem na 4 szachownice $2^n\times 2^n$, z których jedna ma usunięte pole. Aby móc zastosować założenie indukcyjne, potrzebujemy by wszystkie cztery je miały. W tym celu pierwszą L-kę należy wyciąć w odpowiedni sposób ze środka szachownicy $2^{n+1}\times 2^{n+1}$.

6. Należy wykorzystać wzór dwumianowy Newtona dla wyrażenia $(n+1)^p$ oraz fakt, że $p\mid\binom{p}{k}$ dla $k=1,2,\ldots,p-1$.

7. Niech a_n będzie poszukiwaną n-cyfrową wielokrotnością liczby 2^n. Szukaną wielokrotnością 2^{n+1} jest jedna z liczb: 10^n+a_n lub $2\cdot 10^n+a_n$.

8. Będziemy rozpatrywać jedynie takie numeracje n-kątów, w których $n-1$ i n są przypisane sąsiednim wierzchołkom. Krok indukcji o głębokości 3 polega na dodaniu trzech wierzchołków z liczbami $n+3$, $n+2$ i $n+1$ pomiędzy tymi dwoma.

9. Jeśli w ostatnim ruchu połączono stos a monet ze stosem b monet $(a+b=n)$, to na mocy założenia indukcyjnego suma napisanych iloczynów wynosi $\frac{1}{2}a(a-1)+\frac{1}{2}b(b-1)+ab$.

10. Dla n parzystych ten sam kolor mają liczby n i $2+\frac{n}{2}$. Dla n nieparzystych – liczby n, $3(n-3)$ i $6+\frac{n-3}{2}$.