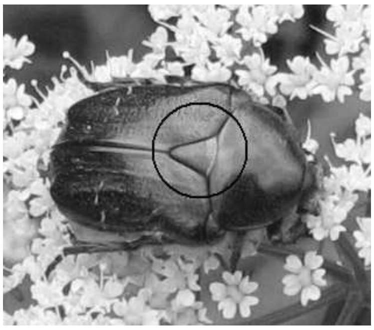


Rys. 2. Scutellum kruszczycy złotawki *Cetonia aurata.*

Bardzo to piękne, ale czy aby na pewno prawdziwe? Pewien niemiecki astrofizyk onegdaj oświadczył: *Symulowalibyśmy gwiazdy nawet wtedy, gdyby one nie istniały.*

Otóż tak, tego rodzaju komórki już odkryto. Okazało się, że skutoidami jest 75% komórek nabłonkowych w gruczołach ślinowych muszki owocowej (*Drosophila melanogaster* – dla genetyków będącej prawdziwym laboratorium) i 50% komórek rozwijających się fałd zarodka owada. Wykryto je również u danio pręgowanego (*Danio rerio*), ryby, która dzięki łatwemu rozmnażaniu i szybko przebiegającemu cyklowi życiowemu także jest wdzięcznym obiektem badań.

Winien jestem jeszcze wyjaśnienie dotyczące nazwy tej nowej bryły. Autorzy odkrycia dopatrzyli się w niej pewnego podobieństwa do pancerza chrząszczy, a konkretnie do fragmentu grzbietowej części segmentu skrzydłotułowia po łacinie nazwanego *scutellum* (od *scutum* – tarcza), a po polsku *zatarczką*. Jest to niewielki trójkąt widoczny na grzbiecie chrząszcza kruszczycy złotawki, pokazany na rysunku 2.

Nieoczekiwane zastosowania szeregu harmonicznego

*Karol GRYSZKA**

* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Problem 1. Do dyspozycji mamy nieograniczoną liczbę prostopadłościennych cegieł o jednakowym rozmiarze i masie. Cegły ustawiamy jedna na drugiej – bez użycia żadnych materiałów klejących. Jak bardzo najwyżej położona cegła może być wysunięta w stosunku do cegły położonej najniżej? Rozkład masy w każdej cegle jest jednorodny.

Problem 2. Na jednym z końców kilometrowej rozciągliwej nici siedzi mrówka. Zaczyna poruszać się ze stałą prędkością 1 cm/s w kierunku drugiego końca. Po upływie każdej sekundy nić wydłuża się o jeden kilometr – natychmiastowo i jednorodnie na całej długości. Czy mrówka jest w stanie dotrzeć na drugi koniec nici?

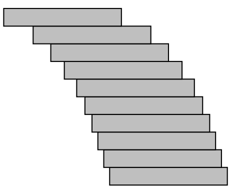
Zanim przedstawimy rozwiązania, przypomnijmy, że *szereg harmoniczny*, suma odwrotności kolejnych liczb naturalnych

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k},$$

jest *rozbieżny*, czyli jego suma jest nieskończona. Wynika to z następujących oszacowań

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^N-1}=\left(\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{N-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{N-1}}\right)>$$
$$>\left(\frac{1}{2}\right)+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{2}}+\ldots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^N}+\ldots+\frac{1}{2^N}\right)}_{\frac{1}{2}}=\frac{N}{2}.$$

Rozbieżność tego szeregu odgrywa kluczową rolę w rozwiązaniach obu problemów.

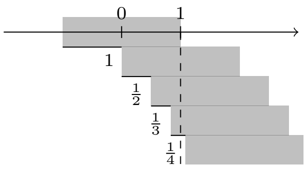


Rys. 1

Rozwiązanie problemu 1. Chcemy ustawić wieżę, której najwyższa cegła będzie wystawała możliwie daleko. Eksperymentując, na przykład z kostkami domino, możemy zauważyć, że niższe kostki warto wysunąć mniej niż te wyższe; wyższe mają „swobodę”, gdyż muszą utrzymać na sobie mniej kostek (rys. 1).

Przyjmijmy, że każda cegła ma długość 2. Masa cegieł jest rozłożona jednorodnie, tak że środek ciężkości znajduje się dokładnie w połowie długości cegły. Jakie wysunięcie można osiągnąć w ten sposób z czterech cegieł? Odwróćmy kolejność budowania i zacznijmy od cegły najwyższej – niech każda nowa cegła będzie dokładana na **spód** wieży z jej prawej strony.

„Z prawej strony” oznacza, że lewy koniec podkładanej cegły ma współrzędną większą niż lewy koniec cegły bezpośrednio nad nią.



Rys. 2. Optymalna wieża z pięciu cegieł. Najwyższa cegła znajduje się w całości poza zasięgiem najniższej cegły.

W środku pierwszej cegły zaczepmy poziomą oś liczbową – współrzędne środków wież będziemy obliczać względem tej osi.

Pierwsza dołożona pod spód cegła musi być ustawiona tak, by górna cegła nie wystawała o więcej niż 1 – w przeciwnym przypadku środek ciężkości górnej cegły znajdowałby się poza punktem podparcia i wieża przewróciłaby się. Jak teraz dostawić trzecią cegłę? Środek ciężkości dwóch górnych cegieł ma współrzędną $\frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$, jest to współrzędna lewego końca trzeciej cegły, której środek ciężkości ma współrzędną $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Jeszcze czwarta cegła. Środek ciężkości trzech dotychczas ustawionych cegieł ma współrzędną $\frac{1}{3}\left(0+1+\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{6}$. Czyli środek ciężkości czwartej cegły ma współrzędną $1 + \frac{5}{6} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}$. Kolejne cegły są wysunięte w prawo o $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ w stosunku do cegły powyżej.

Ustawiajmy kolejne cegły w ten sposób i zaprzęgnijmy do pracy szereg harmoniczny. Oznaczmy przez $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Pokażemy ogólny wzór na współrzędną lewego końca n-tej cegły – a mianowicie jest ona równa $H_{n-1} - 1$ dla $n > 1$. Rozumowanie poprowadzimy indukcyjnie. Przypadek, gdy $n = 2$, przeanalizowaliśmy powyżej, załóżmy zatem słuszność wzoru dla pewnego $n > 1$.

Zauważmy na początek, że środek ciężkości k-tej cegły, dla $1 < k \leqslant n$, ma współrzędną równą H_{k-1} (każda cegła ma długość 2) oraz środek ciężkości pierwszej cegły ma współrzędną równą 0. Tym samym środek ciężkości wszystkich n cegieł ma współrzędną równą

$$\frac{1}{n}\left(0 + \sum_{k=1}^{n-1} H_k\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{n}(nH_{n-1} - (n-1)) = H_{n-1} + \frac{1}{n} - 1 = H_n - 1,$$

gdzie równość $(*)$ uzasadniona jest na marginesie. Pamiętając, że środek ciężkości n cegieł wyznacza położenie lewego końca cegły $(n+1)$-wszej, otrzymujemy tezę.

Wzór

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$$

jest prawdziwy dla wszystkich $n > 0$. Wykażemy to indukcyjnie. Załóżmy, że powyższa równość jest prawdziwa, wtedy zachodzi następujące:

$$\sum_{k=1}^{n+1} H_k = \sum_{k=1}^{n} H_k + H_{n+1} =$$
$$= (n+1)H_n - n + H_{n+1} =$$
$$= (n+1)\left(H_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - n + H_{n+1} =$$
$$= (n+2)H_{n+1} - (n+1).$$

Należy jeszcze sprawdzić pierwszy krok indukcji i tożsamość będzie udowodniona.

Podsumujmy: prawy brzeg najwyższej cegły ma współrzędną 1, lewy koniec każdej kolejnej cegły ma współrzędną równą $H_{k-1} - 1$. W szczególności możliwe jest ustawienie takiej wieży, żeby wysunięcie było równe jednej, dwóm lub dziesięciu długościom cegły. W teorii **wysunięcie może być dowolnie duże**. Wysunięcie większe niż 1 uzyskamy już dla 5 cegieł (rys. 2), długości 2 dla 32 cegieł, długości 3 dla 228 cegieł. Ile cegieł jest potrzebnych do wysunięcia długości 4?

Rozwiązanie problemu 2. Rozważmy ogólniejszy problem: s to początkowa długość nici; d – każdorazowe wydłużenie nici; v – dystans pokonywany przez mrówkę w ciągu każdej sekundy (między wydłużeniem nici). Zobaczmy, co stanie się w pierwszej sekundzie: mrówka pokonała $\frac{v}{s}$ części całej nici, która rozciąga się następnie jednorodnie. Po tym rozciągnięciu mrówka nadal ma za sobą taką samą część całej nici. W drugiej sekundzie sytuacja jest podobna – mrówka pokona $\frac{v}{s+d}$ części nici (o długości $s+d$), a więc łącznie pokona $\frac{v}{s} + \frac{v}{s+d}$ całej drogi. Zauważmy, że proces rozciągania **nie wpływa** na to, w jakiej części nici znajduje się mrówka. Po trzeciej sekundzie mrówka pokona $\frac{v}{s} + \frac{v}{s+d} + \frac{v}{s+2d}$ nici. Niech funkcja $f(n)$ określa część nici przebytą w czasie n sekund (przed rozciągnięciem). Możemy stwierdzić, że

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{v}{s+kd}.$$

Zauważamy jednak, że dla $k > 0$ zachodzi $\frac{v}{s+kd} \geqslant \frac{v}{s+d} \cdot \frac{1}{k}$, stąd

$$f(n) \geqslant \frac{v}{s} + \frac{v}{s+d} \cdot H_n > \frac{v}{s+d} \cdot H_n.$$

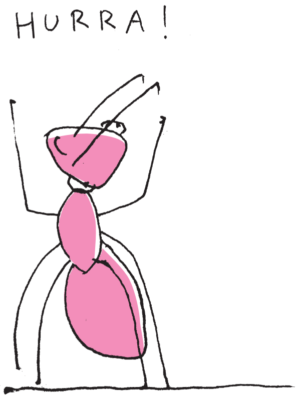
Ponieważ H_n jest rozbieżny, to istnieje takie n, dla którego $H_n > \frac{s+d}{v}$; dla takiego n otrzymujemy $f(n) > 1$. A to oznacza, że **mrówka dotarła na drugi koniec nici**!

Zauważmy rzecz niezwykłą – niezależnie od wyboru wartości v, s oraz d, mrówka ostatecznie zawsze pokona cały dystans. Potrzebne jest jednak robocze założenie, że mrówka jest nieśmiertelna. Aby się przekonać dlaczego, odpowiedzmy na pytanie: jak długo mrówka będzie musiała kroczyć, aby osiągnąć swój cel?

Rozwiązanie zadania M 1607. Pomalujmy każdy trójkąt danej triangulacji na czarno albo na biało w taki sposób, aby trójkąty mające wspólny bok miały różny kolor. Takie kolorowanie można uzyskać rozpoczynając od pomalowania dowolnego trójkąta, a następnie kolorując kolejno trójkąty graniczące bokiem z pomalowanymi dotychczas. Oznaczmy liczby białych i czarnych trójkątów odpowiednio przez b i c.

Z warunków zadania wynika, że wszystkie boki danego n-kąta należą do trójkątów triangulacji tego samego koloru; bez straty ogólności przypuśćmy, że jest to kolor czarny. Tymczasem każda przekątna triangulacji jest bokiem dokładnie jednego trójkąta czarnego i jednego trójkąta białego. Stąd wniosek, że łączna liczba narysowanych przekątnych jest równa $3b$, a łączna liczba boków n-kąta i narysowanych przekątnych jest równa $3c$. W konsekwencji $n = 3(c-b)$.

Otóż ma miejsce następujące przybliżenie
$$f(n)=\frac{v}{s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{v}{s+kd}\approx\frac{v}{s}+\frac{v}{d}\ln\left(1+\frac{(n-1)d}{s+d}\right).$$
Po przekształceniach otrzymujemy jawny wzór na n – przybliżony czas marszu mrówki wynosi
$$n=\frac{s+d}{d}e^{\frac{d}{v}-\frac{d}{s}}-\frac{s}{d}.$$
W szczególności, dla danych opisanych w naszym problemie otrzymujemy $n\approx 2{,}065\cdot 10^{43429}$ sekund. To duża (!) liczba – szacowany wiek Wszechświata to około $4\cdot 10^{17}$ sekund.



Problem 2 można uogólnić na przypadek, w którym nie tylko mrówka porusza się ze stałą prędkością, ale również nić rozciąga się stale (tj. w każdej chwili ze stałą prędkością). Innymi słowy – przypadek dyskretny omówiony powyżej zamieniamy na problem z czasem ciągłym. Przy czym ostrzegamy: do rozwiązania użyjemy *równania różniczkowego*.

Problem 2 oraz jego wariant wydają się sprzeczne z intuicją i z tego powodu często określa się je mianem paradoksu – jest on zbliżony w swojej naturze do *paradoksu Achillesa i żółwia*.

Rozwiązanie problemu 2′. Niech $x(t)$ oznacza pozycję mrówki w chwili t. Nić zaczepiamy na osi liczbowej tak, że jej nieruchomy koniec jest w punkcie $x=0$, drugi zaś koniec przesuwa się wzdłuż dodatniej półosi. Prędkość, z jaką porusza się mrówka, jest równa v powiększonemu o bieżącą prędkość, z jaką rozciąga się dany kawałek nici. Aktualna długość nici to $s+td$ i tylko drugi koniec porusza się z prędkością d – punkt odległy o $x(t)$ od punktu początkowego mrówki porusza się z prędkością $d\cdot\frac{x(t)}{s+td}$ proporcjonalną do położenia na nici. Równanie różniczkowe (ostrzegaliśmy) opisujące taką sytuację:
$$x'(t)=v+\frac{dx(t)}{s+td}.$$

Równanie występujące w rozwiązaniu Problemu 2′ jest typu Lagrange'a–d'Alemberta i jego (dość skomplikowane) rozwiązanie pomijamy.

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja
$$x(t)=(s+td)\cdot\left(A+\frac{v}{d}\ln(s+td)\right),$$
gdzie $A\in\mathbb{R}$ jest pewną nieznaną stałą. Wyznaczamy ją przez uwzględnienie warunku $x(0)=0$, który znajduje się w opisie problemu. Otrzymujemy $A=-\frac{v}{d}\ln s$, a tym samym
$$x(t)=\frac{v}{d}\cdot(s+td)\cdot\ln\left(1+t\frac{d}{s}\right).$$
Rozwiązanie problemu polega teraz na znalezieniu takiego t, dla którego $x(t)=s+td$. Korzystając z wyprowadzonego przed chwilą wzoru, możemy wykazać, że
$$t=\frac{s}{d}\left(e^{\frac{d}{v}}-1\right).$$
Oznacza to w szczególności, że dla dowolnego $v>0$ oraz dowolnych $s,d>0$ mrówka zawsze dotrze na koniec nici. Jeżeli $s=1$km, $d=1$km/s oraz $v=1$ cm/s, to $t\approx 2{,}807\cdot 10^{43429}$ sekund. Jest to wynik bardzo zbliżony do tego otrzymanego w przypadku dyskretnym. Co więcej, można zauważyć spore podobieństwo w otrzymanych wzorach przybliżających czas wędrówki.

***

Zostawmy chwilowo szereg harmoniczny i przyjrzyjmy się ekspansji Wszechświata. Współczesny model kosmologiczny bazuje na dwóch kluczowych obserwacjach:

- obiekty odległe od Ziemi oddalają się od niej,
- tempo oddalania jest proporcjonalne do odległości od Ziemi.

Stała Hubble'a opisuje tempo ekspansji Wszechświata. Jej dokładna wartość nie jest znana, jednak dane z obserwacji odległych obiektów wskazują jej wartość w granicach 67–74 kilometrów na sekundę na każdy megaparsek (parsek to w przybliżeniu 3,2616 lat świetlnych).

Te obserwacje to tak zwane *prawo Hubble'a*. Taki model Wszechświata jest zbliżony w opisie do Problemu 2 (również 2′) – Wszechświatem jest nić, a jego ekspansja to jej rozciąganie. Zauważmy, że w modelu z nicią tempo rozciągania było proporcjonalne do odległości od jednego z końców nici (tego, z którego zaczynała swój marsz mrówka) – odpowiada to dokładnie prawu Hubble'a.
Co w szczególności wynika z rozwiązania problemów 2 i 2′ dla podboju Wszechświata? Nie musimy przejmować się tym, że dalsze punkty uniwersum oddalają się coraz szybciej. Mając do dyspozycji odpowiedni statek i dużo czasu, możemy dotrzeć do dowolnego punktu w obserwowalnym kosmosie.

Na tym nie kończą się zastosowania rozbieżności szeregu harmonicznego. Można za jego pomocą wykazać istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych (zobacz: Δ^7_{16}) lub dowieść twierdzenia Schura (zobacz: Δ^3_{16}).