Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 771 ($WT = 2{,}91$) i 772 ($WT = 1{,}57$) z numeru 12/2018

Marcin Małogrosz	Warszawa	48,12
Michał Adamaszek	Kęty	44,23
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	40,74
Witold Bednarek	Łódź	39,79
Paweł Najman	Kraków	38,58
Paweł Kubit	Kraków	38,09
Jerzy Cisło	Wrocław	37,86
Krzysztof Kamiński	Pabianice	37,32
Michał Koźlik	Gliwice	35,73

Oto i dzień Weteranów Klubu 44 M. Pan Marcin Małogrosz – po swej trzeciej ukończonej kolejce – jest Weteranem trzydziestym dziewiątym. Zaś pan Michał Adamaszek (Weteran od dawna) właśnie zalicza czwartą kolejkę.

Rozwiązania zadań z numeru 3/2019

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

777. W trójkącie ABC bok BC jest najdłuższy. Okrąg wpisany jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach K, L, M. Na prostej KM leży taki punkt P, że odcinki PC oraz KL są równoległe. Dowieść, że prosta AP przechodzi przez środek odcinka KL.

778. Znaleźć wszystkie trójki liczb całkowitych x, y, z spełniające równanie

$$\big(x+y+z\big)^2 = 2\big(x^2+y^2+z^2\big)$$

wraz z warunkiem $\mathrm{NWD}(x,y,z) = 1$.

777. Punkt przecięcia prostych CA i KM oznaczmy przez N, a punkt przecięcia prostych AP i KL – przez S. Przyjmijmy ponadto oznaczenia: $x = |AL| = |AM|$, $y = |BM| = |BK|$, $z = |CK| = |CL|$ (więc $x < y$, $x < z$); $w = |AN|$. Dzięki równoległości $CP \| LK$ mamy podobieństwa $\triangle NCP \sim \triangle NLK$, $\triangle ACP \sim \triangle ALS$, z których wynikają proporcje

$$\frac{|CP|}{|LK|} = \frac{|NC|}{|NL|} = \frac{w+x+z}{w+x}, \qquad \frac{|CP|}{|LS|} = \frac{|AC|}{|AL|} = \frac{x+z}{x}.$$

Zadanie sprowadza się do wykazania, że $|LK| = 2\cdot|LS|$, czyli że

$$\frac{w+x+z}{w+x} = \frac{x+z}{2x}.$$

Twierdzenie Menelausa (dla trójkąta ABC przeciętego prostą KM) daje równość

$$\frac{|AM|}{|MB|}\cdot\frac{|BK|}{|KC|}\cdot\frac{|CN|}{|NA|} = \frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{w+x+z}{w} = 1.$$

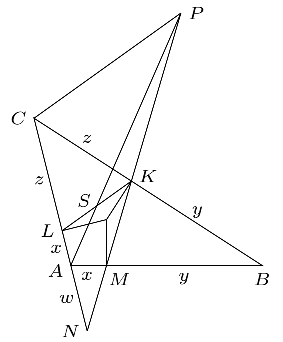
Z niej kolejno wyznaczamy

$$w = \frac{x(z+x)}{z-x}, \qquad w + x = \frac{2xz}{z-x}$$

i otrzymujemy

$$\frac{w+x+z}{w+x} = 1 + \frac{z}{w+x} = 1 + \frac{z-x}{2x} = \frac{x+z}{2x}.$$

czyli to, o co chodziło.



778. Z tożsamości

$$(x+y+z)^2 + (x+y-z)^2 = 2(x^2+y^2+z^2) + 4xy$$

wynika, że zadane równanie jest równoważne następującemu:

$$(1) \qquad (x+y-z)^2 = 4xy.$$

Jest też równoważne każdemu z dwóch równań uzyskanych przez cykliczne przestawienie zmiennych w (1). Jeśli więc liczby całkowite x, y, z spełniają warunki zadania, to iloczyny xy, yz, zx są nieujemne, co oznacza, że liczby x, y, z są wszystkie nieujemne lub wszystkie niedodatnie.

Weźmy przypadek, gdy $x, y, z \geqslant 0$. Ze związku (1) (oraz warunku, że x, y, z nie mają wspólnego dzielnika > 1) wynika, że $x = a^2$, $y = b^2$ dla pewnej pary liczb całkowitych $a, b \geqslant 0$, względnie pierwszych. Przepisujemy (1) jako $a^2 + b^2 - z = \pm 2ab$, czyli $z = (a \pm b)^2$.

Uwzględniając pominięty przypadek, gdy $x, y, z \leqslant 0$, widzimy, że trójka (x, y, z) ma postać

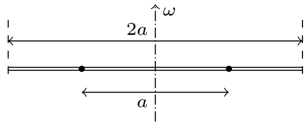
$$(2) \qquad (\pm 1)\cdot\big(a^2, b^2, (a\pm b)^2\big);$$
$$a, b \in \mathbb{N}\cup\{0\}; \qquad \mathrm{NWD}(a,b) = 1.$$

Na odwrót, jeśli trójka liczb całkowitych x, y, z ma taką postać (więc $x = \varepsilon a^2$, $y = \varepsilon b^2$, $z = \varepsilon(a + \varepsilon' b)^2$; $\varepsilon, \varepsilon' \in \{1, -1\}$), wówczas spełnione jest równanie (1) (równoważne wyjściowemu), zaś liczby x, y, z są względnie pierwsze. Wzór (2) przedstawia więc ogólne rozwiązanie postawionego zagadnienia. [Można sformułować tę odpowiedź w formie bardziej symetrycznej, pisząc, że liczby x, y, z, po ewentualnej jednoczesnej zmianie znaku, są kwadratami trzech względnie pierwszych liczb całkowitych, z których jedna jest sumą dwóch pozostałych].

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

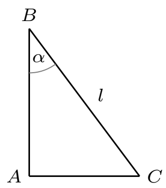
Przypominamy treść zadań:

674. Nieważki poziomy pręt o długości $2a$ może obracać się swobodnie wokół pionowej osi przechodzącej przez jego środek (rys. 1). Na pręt nawleczone są dwie jednakowe kulki, które mogą przemieszczać się wzdłuż pręta bez tarcia i odbijać się sprężyście od odbojników na jego końcach. Na początku kulki umocowane są w odległościach $a/2$ od osi obrotu. Pręt rozkręcono do prędkości kątowej ω_0, po czym kulki jednocześnie oswobodzono. Po jakich torach będą poruszać się kulki? Po jakim czasie pręt wykona pełny obrót? Jaka jest zależność prędkości kątowej pręta od czasu? Rozmiary kulek są dużo mniejsze od długości pręta.



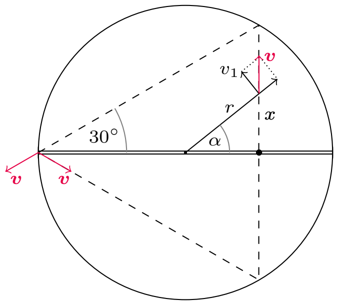
Rys. 1

675. Trzy jednakowe naładowane kulki połączone są nieprzewodzącymi nićmi, które tworzą trójkąt prostokątny ABC (rys. 2). Kąt ABC jest równy α, bok BC ma długość l. Z jakimi przyspieszeniami zaczną poruszać się kulki po przecięciu nici BC? Masa kulki jest równa m, ładunek każdej z nich wynosi q. Sił ciężkości nie uwzględniamy.



Rys. 2

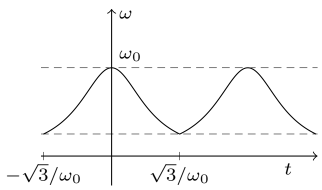
674. Dzięki symetrii początkowych położeń i prędkości, kulki przez cały czas znajdować się będą w punktach symetrycznie położonych względem osi obrotu oraz będą miały symetryczne prędkości. Ponieważ pręt jest nieważki, nie występują siły prostopadłe do niego, leżące w płaszczyźnie poziomej. Nie ma tarcia, wobec tego wzdłuż pręta na kulki również nie działają żadne siły i między kolejnymi zderzeniami z końcami prętów kulki poruszają się względem Ziemi ruchem jednostajnym prostoliniowym (rys. 3) z prędkością $v = \omega_0 a/2$. Podczas zderzenia z odbojnikiem składowa pędu kulki prostopadła do pręta nie zmienia się. Zderzenie jest sprężyste, zatem kąty padania i odbicia są sobie równe i wynoszą $\pi/6$. Torem ruchu każdej z kulek jest trójkąt równoboczny o boku $l = a\sqrt{3}$. Pręt wykona pełny obrót w czasie $T = 3l/v = 6\sqrt{3}/\omega_0$. Prędkość kątowa pręta dana jest wzorem $\omega = v_1/r$, promień r spełnia równanie $r^2 = a^2/4 + x^2$, gdzie $x = vt$, a v_1 jest składową prędkości v prostopadłą do promienia. Z rysunku 3 widać, że zachodzi związek $v_1/v = a/\,(2r)$. Szukana zależność prędkości kątowej pręta od czasu dana jest wzorem



Rys. 3

$$\omega = \frac{\omega_0}{(1+\omega_0^2 t^2)} \quad \text{dla } -\sqrt{3}/\omega_0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}/\omega_0.$$

W chwili $t = \sqrt{3}/\omega_0$ następuje zderzenie z odbojnikiem i cykl się powtarza (rys. 4).



Rys. 4

675. Wprowadźmy prostokątny układ współrzędnych XY jak na rysunku 5. Ponieważ kulki A i C połączone są nicią, mają wzdłuż osi X jednakowe przyspieszenia. Na układ tych kulek działają siły F_1 i F_2. F_1 jest siłą oddziaływania elektrycznego między kulkami B i C, F_2 jest wypadkową siły Coulomba między kulkami A i B oraz siły naprężenia nici AB i nie ma składowej wzdłuż osi X. Równanie ruchu układu wzdłuż osi X ma postać:

$$2ma_x = F_1 \sin\alpha,$$

stąd rzuty przyspieszeń kulek A i C na oś X są równe

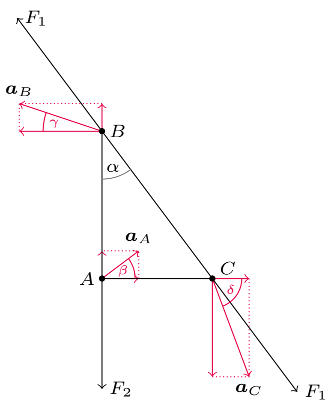
$$a_x^A = a_x^C = a_x = \frac{kq^2}{2ml^2}\sin\alpha,$$

gdzie $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Analogicznie dla układu kulek A i B, również połączonych nicią,

$$a_y^A = a_y^B = a_y = \frac{kq^2}{2ml^2}\cos\alpha.$$

Wartość przyspieszenia kulki A jest równa:

$$a^A = \sqrt{(a_x^A)^2 + (a_y^A)^2} = \frac{kq^2}{2ml^2}.$$



Rys. 5

Wektor a^A tworzy z osią X kąt β taki, że $\operatorname{tg}\beta = a_y^A/a_x^A = \operatorname{ctg}\alpha$. Równanie ruchu kulki B w kierunku osi X ma postać $ma_x^B = F_1 \sin\alpha$. Stąd:

$$a^B = \frac{kq^2}{2ml^2}\sqrt{1+3\sin^2\alpha} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Analogicznie dla kulki C otrzymujemy: $a_y^C = F_1\cos\alpha/m$,

$$a^C = \frac{kq^2}{2ml^2}\sqrt{1+3\cos^2\alpha} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\delta = 2\operatorname{ctg}\alpha.$$