



mała delta

Nieskończoność: 4. Nie każda jest taka sama!

W poprzednim odcinku sprawdziliśmy, że zbiór liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem liczb wymiernych (także zbiór liczb całkowitych jest równoliczny z każdym z nich). Inaczej mówiąc, można ustawić liczby wymierne w pary z liczbami naturalnymi w taki sposób, że każda liczba wymierna stoi w parze z dokładnie jedną liczbą naturalną i każda liczba naturalna stoi w parze z dokładnie jedną liczbą wymierną. Można też powiedzieć, że wszystkie liczby wymierne da się zakwaterować w hotelu Hilberta.

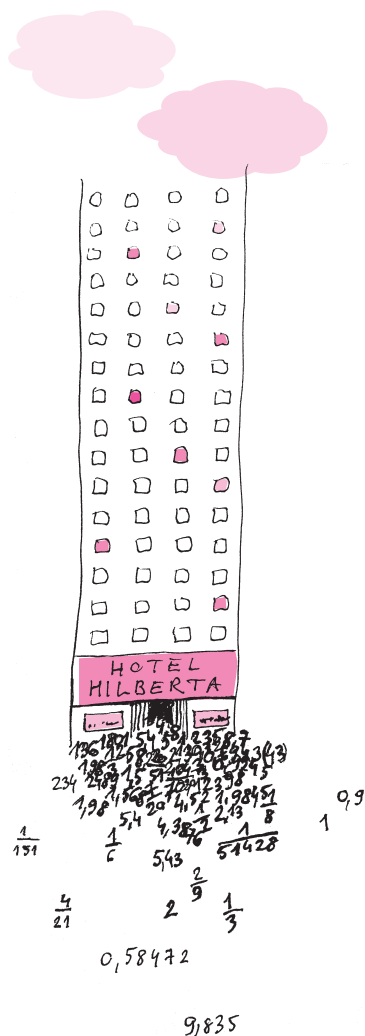
Wobec tego każde dwa rozważane do tej pory zbiory nieskończone okazywały się równoliczne. A może po prostu zawsze tak jest? Może każde dwa nieskończone zbiory są równoliczne? Może elementy dowolnych dwóch nieskończonych zbiorów da się ustawić w pary? Może każda nieskończoność jest pod tym względem taka sama?

Okazuje się, że nie! Udowodnimy mianowicie, że wszystkich liczb rzeczywistych nie da się zakwaterować w hotelu Hilberta. Jasne jest, że liczb rzeczywistych jest nie mniej niż liczb wymiernych – w takim sensie, że każdy z Czytelników prawdopodobnie jest w stanie wskazać liczbę rzeczywistą, która nie jest wymierna. Na przykład $\sqrt{2}$ albo takie słynne liczby, jak π czy e . Okazuje się jednak, że jest ich dużo więcej – jest ich więcej również w sensie rozważanego przez nas pojęcia równoliczności zbiorów.

Zanim jednak ten fakt udowodnimy, niezbędne jest ustalenie pewnej podstawowej własności liczb rzeczywistych. Wygodne w tym celu będzie wyobrażenie sobie liczb rzeczywistych jako wszystkich punktów na prostej, zwanej osią liczb rzeczywistych. Przy takim wyobrażeniu stanie się jasne, że jeśli rozpatrzyć dowolny ciąg coraz krótszych domkniętych przedziałów $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$, z których każdy kolejny zawiera się w poprzednim, to istnieje punkt na osi (czyli liczba rzeczywista), który należy do wszystkich tych przedziałów. Mam nadzieję, że wszyscy Czytelnicy zgodzą się z tą własnością, a zresztą definicja zbioru liczb rzeczywistych bezpośrednio właśnie na tej własności jest oparta.

Mając to w pamięci, przejdźmy do dowodu faktu, że liczb rzeczywistych nie da się zakwaterować w hotelu Hilberta. Właściwie spróbujemy zakwaterować tylko liczby z przedziału $[0, 1]$. Jeśli nawet ich nie uda się zakwaterować, to oczywiście tym bardziej nie da się tego zrobić ze wszystkimi liczbami rzeczywistymi. Załóżmy jednak, nie wprost, że jest to możliwe. Załóżmy, że udało się zakwaterować wszystkie liczby rzeczywiste z przedziału $[0, 1]$ w hotelu Hilberta. Została zatem stworzona lista kwaterunkowa x_0, x_1, x_2, \dots wszystkich liczb z tego przedziału, gdzie liczba x_0 to liczba zakwaterowana do pokoju o numerze 0, liczba x_1 to liczba zakwaterowana do pokoju 1 itd. Co więcej, na tej liście są wszystkie liczby z rozważanego przedziału.

To założenie doprowadzi nas jednak do sprzeczności. Podzielmy bowiem rozważany przedział na trzy części $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$ i $[2/3, 1]$. Zauważmy, że jeden z tych trzech przedziałów nie zawiera liczby x . W najgorszej sytuacji (gdy jest równa $1/3$ lub $2/3$) leży w dwóch z nich. A zatem wybierzmy z nich ten przedział, w którym nie leży x_0 . Niech to będzie przedział I_0 . Następnie podzielmy przedział I_0 na trzy równe domknięte odcinki (stykające się brzegowymi punktami). Zauważamy, że x_1 na pewno nie leży w jednym z nich. Oczywiście być może x_1 nie leży nawet w całym przedziale I_0 . Ale jeśli leży,



to co najwyżej w dwóch z tych trzech części jego podziału. Tak czy inaczej, jest jedna część, którą nazwiemy $I_1 \subseteq I_0$, w której x_1 na pewno nie leży. Dzielimy podobnie I_1 na trzy części i podobnie wybieramy tę z nich, w której nie ma x_2 , nazywając ją I_2 . I postępujemy tak dalej, konstruując nieskończony ciąg coraz mniejszych domkniętych przedziałów $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$, z których każdy kolejny zawarty jest w poprzednim.

Ale, zgodnie z naszą obserwacją, istnieje liczba p , która leży we wszystkich tak wybranych przedziałach. Zauważmy jednak, że $p \neq x_0$, bowiem p leży w I_0 , w przeciwieństwie do x_0 . Podobnie $p \neq x_1$, bowiem p jest punktem na I_1 , a x_1 nie jest. Rozumując tak dalej, zauważamy, że wobec tego liczby p nie ma w ogóle na naszej liście kwaternkowej x_0, x_1, x_2, \dots , co jest sprzeczne z założeniem, że umieściliśmy na niej wszystkie liczby z przedziału $[0, 1]$.

A zatem liczb rzeczywistych nie da się zakwaterować w hotelu Hilberta! Zbiór liczb rzeczywistych nie jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

Poszukajmy innych tego typu przykładów. Okazuje się, że zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych też ma tę własność, że nie jest możliwe zakwaterowanie wszystkich jego elementów w hotelu Hilberta. Założmy przeciwnie, że to możliwe, i rozważmy listę kwaternkową, na której przyporządkowano wszystkie takie ciągi do pokoi. Lista ta będzie miała charakter tabelki o nieskończonej szerokości i wysokości, w której w kolejnych rzędach zapisano kolejne nieskończone ciągi zer i jedynek przyporządkowane do kolejnych pokoi hotelu Hilberta. Jej lewy górny róg mógłby wyglądać następująco:

0	0	1	1	0	1	...
1	1	1	0	1	1	...
2	0	0	0	0	1	...
3	1	1	0	1	1	...
4	0	1	1	1	1	...
...						

W poszukiwaniu sprzeczności spójrzmy na przekątną tej tabelki i rozważmy ciąg zer i jedynek, w którym wszystko jest zrobione „na złość”. Niech ten ciąg będzie skonstruowany następująco: jeśli początkowy (zerowy) wyraz ciągu z pokoju 0 to 0, to niech nasz ciąg na tym miejscu ma 1, zaś jeśli wyraz ten to 1, niech nasz ciąg ma na tym miejscu 0. Podobnie, jeśli kolejny (pierwszy) wyraz ciągu zakwaterowanego w pokoju 1 to 0, niech nasz ciąg na tym miejscu ma 1, zaś jeśli wyraz ten to 1, niech nasz ciąg ma na tym miejscu 0. I tak dalej, nasz ciąg na n -tym swoim miejscu niech ma tę z liczb 0 lub 1, która nie występuje na n -tym miejscu ciągu zakwaterowanego w n -tym pokoju. Gdyby lewy górny róg listy kwaternkowej wyglądał tak, jak przedstawiono wyżej, nasz ciąg zaczynałby się więc następująco: 1, 0, 1, 0, 0, ...

Ale tego znalezionego ciągu, wbrew założeniu, nie ma na liście kwaternkowej. Rzeczywiście, różni się od każdego ciągu na tej liście: od zerowego na zerowym miejscu, od pierwszego na pierwszym, i tak dalej, od n -tego

ciągu na n -tym swoim miejscu. Co stanowi sprzeczność i dowodzi, że zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zer i jedynek nie jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

Aby znaleźć kolejny taki przykład, rozważmy pojęcie zbioru wszystkich podzbiorów danego zbioru. Jeśli zbiór A to trzejelementowy zbiór osób, do którego należą Alojzy, Bonifacy i Cezary, to zbiór jego podzbiorów ma 8 elementów. Są to: zbiór pusty, trzy zbiory jednoosobowe (zbiór, którego jedynym elementem jest Alojzy, zbiór, którego jedynym elementem jest Bonifacy, i taki sam zbiór, tyle że z Cezarym), trzy zbiory dwuosobowe o elementach odpowiednio: Alojzy z Bonifacym, Bonifacy z Cezarym i Alojzy z Cezarym, oraz w końcu cały trzejelementowy zbiór. Łatwo można wysnuć wniosek, że podzbiorów zbioru n -elementowego jest 2^n – zachęcamy Czytelników do zastanowienia się przez chwilę, dlaczego tak jest. Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A będziemy oznaczać jako $\mathcal{P}(A)$.

Rozważmy zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Jego elementy to wszystkie podzbiory zbioru liczb naturalnych, a więc na przykład zbiór liczb nieparzystych, zbiór liczb pierwszych, ale też zbiór pusty. Oczywiście $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest zbiorem nieskończonym. Okazuje się, że jest on na tyle duży, że także nie jest możliwe zakwaterowanie jego elementów w hotelu Hilberta. Aby tego dowieść, zauważmy, że każdy podzbiór liczb naturalnych można zakodować za pomocą nieskończonego ciągu zero-jedynkowego, w którym kolejne cyfry kodują obecność (oznaczaną jako 1) lub nieobecność (oznaczaną jako 0) kolejnych liczb naturalnych w rozpatrywanym podzbiore. Zatem kod zbioru liczb pierwszych zacznie się od 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, ..., bowiem 0, 1, 4, 6, 8, 9, 10 nie są pierwsze, więc na tych miejscach w ciągu widzimy zera, a 2, 3, 5, 7, 11 są liczbami pierwszymi, co skutkuje jedynekami na odpowiednich miejscach ciągu.

Ale skoro każdy podzbiór zbioru liczb naturalnych ma swój unikalny kod w postaci nieskończonego ciągu zer i jedynek (oraz każdy ciąg zer i jedynek odpowiada pewnemu podzbiore liczb naturalnych), to nie jest możliwe zakwaterowanie wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych w hotelu Hilberta, bowiem, jak już wiemy, nie da się tego zrobić dla zbioru wszystkich ciągów zero-jedynkowych. Zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nie jest równoliczny ze zbiorem \mathbb{N} . Możemy napisać, że $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Okazuje się, że zachodzi ogólniejszy fakt. Powyższa zależność jest prawdziwa dla dowolnego zbioru A (skończonego lub nieskończonego). Podzbiorów zbioru A nigdy nie da się ustawić w pary z jego elementami, co będziemy notować $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. Zachęcam Czytelników do zastanowienia się, dlaczego tak jest. Wystarczy nieco zmodyfikować przedstawiony dowód, że $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$!

Twierdzenie to udowodnił już Georg Cantor. Nosi ono jego imię. Pora więc wrócić do jego rozważań i prześledzić historię zaskakującego problemu, którego Cantorowi nie udało się rozwiązać. Ale to już w następnym odcinku.

Michał KORCH