Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2019

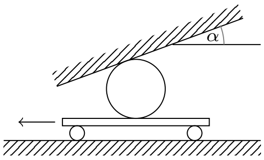
Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 680, 681

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



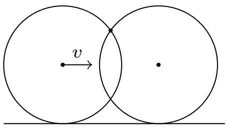
Rys. 1

680. Walec o masie M znajduje się między ruchomą poziomą platformą i nieruchomą powierzchnią nachyloną do poziomu pod kątem α (rys. 1). Współczynnik tarcia walca o platformę wynosi μ_1, a o powierzchnię nachyloną μ_2. Jaką minimalną siłę trzeba przyłożyć do platformy, aby walec nie obracał się, a platforma poruszała się w lewo ruchem jednostajnym?

681. Na powierzchnię szkła naniesiono cienką warstwę materiału, którego współczynnik załamania $n = 4/3$ jest mniejszy od współczynnika załamania szkła. Jaka może być najmniejsza grubość tej warstwy, aby przy prostopadłym padaniu światła białego długości fali $\lambda_1 = 700$ nm oraz $\lambda_2 = 420$ nm w świetle odbitym były jednocześnie maksymalnie wygaszone?

Rozwiązania zadań z numeru 2/2019

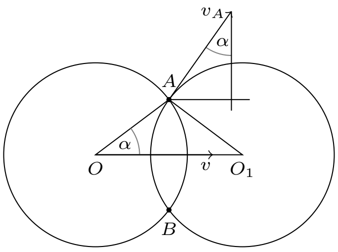
Przypominamy treść zadań:



Rys. 2

672. Na poziomej powierzchni stoi cienka obręcz o promieniu R. Mija ją ze stałą prędkością v taka sama obręcz (rys. 2). Obręcze przylegają do siebie. Znaleźć zależność prędkości górnego punktu „przecięcia" obręczy od odległości między ich środkami.

673. W cylindrze zamkniętym tłokiem znajduje się w stanie równowagi n moli jednoatomowego gazu doskonałego. Tłok może przemieszczać się w cylindrze bez tarcia, cylinder i tłok są izolowane cieplnie od otoczenia. Ciśnienie zewnętrzne wynosi p_1, temperatura gazu w cylindrze T_1. W pewnej chwili ciśnienie zewnętrzne wzrasta skokowo do wartości p_2, a po ustaleniu się stanu równowagi spada skokowo do pierwotnej wartości. Znaleźć i porównać temperatury gazu w skrajnych stanach równowagi.



Rys. 3

672. Ponieważ obręcz o środku w punkcie O_1 jest nieruchoma, prędkość v_A punktu A jest w każdej chwili styczna do okręgu o środku w O_1 (rys. 3). Odcinek AB dzieli odległość $d = |OO_1|$ na dwie równe części, zatem składowa pozioma prędkości v_A ma stałą wartość $v/2$. Wektor v_A tworzy z pionem kąt α i ma długość $v_A = v/(2\sin\alpha)$. Zachodzi związek $\sin\alpha = \sqrt{1-(d/2R)^2}$ i szukana zależność ma postać

$$v_A = \frac{v}{2\sqrt{1-(d/2R)^2}}.$$

673. W stanie początkowym objętość gazu wynosi $V_1 = (nRT_1)/p_1$. Oznaczmy objętość gazu po zwiększeniu ciśnienia do p_2 i ustaleniu się równowagi przez V_2, a temperaturę w tym stanie przez T_2. Przemiana jest adiabatyczna, ale nie kwazistacjonarna, korzystamy więc z pierwszej zasady termodynamiki: $\Delta U = W$, gdzie $\Delta U = 3nR(T_2 - T_1)/2$ jest zmianą energii wewnętrznej, a praca wykonana nad gazem jest dodatnia i wynosi $W = p_2(V_1 - V_2) = nR(p_2T_1/p_1 - T_2)$. Stąd temperatura w stanie równowagi po sprężeniu gazu wynosi

$$T_2 = \frac{2p_2 + 3p_1}{5p_1}T_1.$$

Oznaczając objętość końcową przez V_3, a temperaturę przez T_3 i ponownie korzystając z pierwszej zasady termodynamiki oraz równań Clapeyrona, otrzymujemy równanie: $3nR(T_3 - T_2)/2 = p_1(V_2 - V_3) = nR(p_1T_2/p_2 - T_3)$. Stąd temperatura w stanie końcowym dana jest wzorem

$$T_3 = T_1 + \frac{6(p_2-p_1)^2}{25p_1p_2} > T_1.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 666 ($WT = 3{,}05$), 667 ($WT = 2{,}40$) 668 ($WT = 3{,}06$), 669 ($WT = 1{,}45$) z numerów 11/2018 i 12/2018

Marian Łupieżowiec	Gliwice	41,74
Tomasz Rudny	Poznań	40,29
Jan Zambrzycki	Białystok	34,68
Krzysztof Magiera	Łosiów	30,15
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Tomasz Wietecha	Tarnów	27,80
Aleksander Surma	Myszków	25,69
Mateusz Kapusta	Wrocław	25,37
Michał Koźlik	Gliwice	25,18

Zadania z matematyki nr 783, 784

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2019

783. Na płaszczyźnie narysowano N kwadratów o bokach równoległych i prostopadłych do ustalonego wspólnego kierunku. Niech S będzie zbiorem środków tych kwadratów; zakładamy, że jest to N różnych punktów oraz że żaden punkt zbioru S nie leży na brzegu żadnego kwadratu. Udowodnić, że można wyróżnić niektóre z tych N kwadratów tak, by każdy punkt zbioru S leżał w co najmniej jednym wyróżnionym kwadracie oraz w co najwyżej czterech wyróżnionych kwadratach.

784. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, które można zapisać w postaci sumy $p = a^2 + b^2$ $(a, b \geqslant 1$ całkowite) tak, by liczba $2ab$ była kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 784 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2019

Przypominamy treść zadań:

775. Znaleźć wszystkie czwórki liczb nieujemnych a, b, c, d, które jednocześnie spełniają nierówności
$$a + b \geqslant c + d, \quad ab + cd \geqslant (a + b)(c + d), \quad (a + b)cd \geqslant ab(c + d).$$

776. Sześcian o krawędzi długości k przecinamy płaszczyzną π, położoną w odległości d od środka sześcianu. Jaka jest maksymalna wartość d, przy której płaszczyzna π może mieć z każdą ścianą sześcianu co najmniej jeden punkt wspólny?

775. Niech $a, b, c, d \geqslant 0$ będą liczbami o rozważanej własności. Wielomian o pierwiastkach $-a$, $-b$, c, d
$$W(x) = (x + a)(x + b)(x - c)(x - d) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$
ma współczynniki nieujemne, co wynika z podanych założeń:
$$A = a + b - c - d \geqslant 0,$$
$$B = ab + cd - ac - ad - bc - bd \geqslant 0,$$
$$C = -abc - abd + acd + bcd = -ab(c + d) + (a + b)cd \geqslant 0,$$
$$D = abcd \geqslant 0.$$
Skoro $A, B, C, D \geqslant 0$, zatem $W(x) > 0$ dla $x > 0$. Brak pierwiastków dodatnich oznacza, że $c = d = 0$.

Na odwrót, gdy $c = d = 0$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, zadane nierówności są spełnione. Rozwiązaniem zadania są czwórki $(a, b, 0, 0)$ z $a, b \geqslant 0$.

Rozwiązanie zadania M 1603. Przypiszmy drużynom $2n$ punktów przestrzeni, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Jeśli dwie drużyny rozegrały ze sobą mecz pierwszego dnia, połączmy odpowiadające im punkty odcinkiem niebieskim, a jeśli drugiego dnia – odcinkiem czerwonym.

Zauważmy, że uzyskujemy w ten sposób układ łamanych zamkniętych, z których każda ma parzystą liczbę odcinków, gdyż w każdej z nich kolejne odcinki mają różny kolor. Wystarczy z każdej takiej łamanej wybrać co drugi wierzchołek – w ten sposób uzyskamy n punktów, z których żadne dwa nie są połączone odcinkiem. Drużyny odpowiadające tym punktom mają więc żądaną własność.

776. Przyjmijmy $k = 2$ i ustalmy prostokątny układ współrzędnych, w którym wierzchołkami sześcianu są punkty $(\pm1, \pm1, \pm1)$, a rzutem prostokątnym punktu $O = (0, 0, 0)$ na płaszczyznę π jest punkt $P = (a, b, c)$ o współrzędnych $a, b, c \geqslant 0$. Zatem $d^2 = |OP|^2 = a^2 + b^2 + c^2$; zaś płaszczyzna π jest dana równaniem $ax + by + cz = d^2$.

Załóżmy, że ma ona punkty wspólne ze wszystkimi ścianami sześcianu; więc np. ze ścianą o wierzchołkach $(1, 1, -1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, -1)$. Każda z półprzestrzeni $(\, ax + by + cz \leqslant d^2,\ ax + by + cz \geqslant d^2\,)$ musi zawierać jeden z tych czterech wierzchołków. Zatem przy pewnym doborze znaków mamy nierówność $\pm a \pm b - c \geqslant d^2$. Skoro $a, b \geqslant 0$, znaczy to, że $a + b - c \geqslant d^2$.

Analogicznie $a - b + c \geqslant d^2$ oraz $-a + b + c \geqslant d^2$. Dodajemy te trzy nierówności i otrzymujemy
$$a + b + c \geqslant 3d^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2;$$
czyli, równoważnie,
$$\left(a - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{6}\right)^2 \leqslant \frac{1}{12}.$$
Lewa strona to kwadrat odległości punktu P od punktu $Q = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$. Tak więc $|PQ| \leqslant \frac{1}{6}\sqrt{3}$. A ponieważ $|OQ| = \frac{1}{6}\sqrt{3}$, ostatecznie $|OP| \leqslant |OQ| + |QP| \leqslant \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Gdy $P = (a, b, c) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, wszystkie nierówności stają się równościami; płaszczyzna o równaniu $x + y + z = 1$ leży w odległości $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ od O i spotyka wszystkie ściany. Dla $k = 2$ szukane maksimum wynosi więc $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; zaś w przypadku ogólnym – po przeskalowaniu – wynosi $\frac{1}{6}\sqrt{3} \cdot k$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 769 ($WT = 1{,}62$) i 770 ($WT = 2{,}71$) z numeru 11/2018

Andrzej Kurach	Ryjewo	44,06
Marcin Małogrosz	Warszawa	43,64
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	40,74
Michał Adamaszek	Kęty	39,75
Paweł Najman	Kraków	36,72
Paweł Kubit	Kraków	36,23
Krzysztof Kamiński	Pabianice	35,75
Michał Koźlik	Gliwice	35,73
Witold Bednarek	Łódź	35,31

Nowa twarz w Klubie 44: pan Andrzej Kurach. Witamy!