KĄCIK POCZĄTKUJĄCEGO OLIMPIJCZYKA 5

Najważniejsza nierówność na świecie

Bartłomiej BZDĘGA

Oto najważniejsza nierówność na świecie:

$$x^2 \geqslant 0 \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

W praktyce stosuje się ją w następujący sposób. Nierówność $A \geqslant B$, którą chcemy udowodnić, przekształcamy równoważnie do postaci $C \geqslant 0$ i próbujemy zapisać C jako kwadrat liczby rzeczywistej bądź jako sumę kwadratów liczb rzeczywistych.

Zadania

1. Udowodnić, że dla liczb dodatnich x, y, z prawdziwa jest nierówność
$$\sqrt{\frac{yz+zx+xy}{3}} \leqslant \frac{x+y+z}{3}.$$
2. Wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość wyrażenia
$$\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$$
dla liczb rzeczywistych x i y, niebędących jednocześnie zerami.
3. Udowodnić, że dla liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1.$$
4. Wykazać nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i kwadratową
$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}$$
dla liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
5. Suma liczb dodatnich a, b, c jest równa 1. Udowodnić, że
$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \leqslant 1.$$
6. Liczby dodatnie a, b, c spełniają równość $a+b+c=1$. Wykazać, że
$$\frac{3a-1}{1-a^2} + \frac{3b-1}{1-b^2} + \frac{3c-1}{1-c^2} \geqslant 0.$$
7. Udowodnić, że dla liczb nieujemnych a, b i c zachodzi nierówność
$$\sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3} + \sqrt{a^3b^3} \leqslant c^3 + \frac{1}{4}(a+b)^3.$$
8. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą liczbami dodatnimi. Przyjmijmy $x_{n+k} = x_k$ dla całkowitych k. Dowieść, że prawdziwa jest co najmniej jedna z nierówności:
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geqslant \frac{n}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1}+x_{i-2}} \geqslant \frac{n}{2}.$$
9. Wykazać, że dla liczb rzeczywistych $x, y, z \geqslant \frac{1}{2}$, spełniających warunek $xyz = 1$, zachodzi nierówność
$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \geqslant x+y+z+3.$$
10. Dowieść, że liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają nierówność
$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+bc+cd+da \geqslant 2(a+b+c+d-1).$$
11. Dowieść, że dla liczb rzeczywistych a, b, c, d zachodzi nierówność
$$(a+b+c+d)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2+d^2) + 6ab.$$
12. Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-1, 1]$ spełniają warunek $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0$. Dowieść, że
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \frac{n}{3}.$$
13. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność
$$(a+b+c+d)^3 \leqslant 4(a^3+b^3+c^3+d^3) + 24(abc+bcd+cda+dab).$$

Wskazówki do zadań

1. Podnieść nierówność obustronnie do kwadratu, a następnie przekształcić do postaci
$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geqslant 0.$$
2. Te wartości to odpowiednio $\frac{1}{3}$ oraz 3. Rozwiązanie ułatwia spostrzeżenie, że szacowany ułamek ma dodatni licznik i mianownik, bo
$$x^2 \pm xy + y^2 = \left(x \pm \tfrac{1}{2}y\right)^2 + \tfrac{3}{4}y^2.$$
3. Po obustronnym pomnożeniu przez 2 i przeniesieniu wszystkich wyrazów na lewą stronę nierówności otrzymamy
$$(x_1-x_2)^2 + (x_2+x_3)^2 + \ldots$$
$$\ldots + (x_{n-1}-x_n)^2 + (x_n-x_1)^2 \geqslant 0.$$
4. Można wykorzystać tożsamość
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2.$$
5. Należy najpierw ujednorodnić nierówność:
$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc(a+b+c)} \leqslant (a+b+c)^2.$$
Po uproszczeniu podstawienie nowych zmiennych za iloczyny bc, ca i ab ułatwia dalsze rachunki.
6. Wykazać, że
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b}\right) \geqslant \frac{2}{1+c}$$
oraz dwie nierówności analogiczne, następnie dodać wszystkie te trzy nierówności stronami.
7. Dobrym punktem wyjścia jest nierówność $\left(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} - 2\sqrt{c^3}\right)^2 \geqslant 0$.
8. Wystarczy wykazać, że prawdziwa jest suma tych nierówności – wtedy prawdziwa jest co najmniej jedna z nich. Ta suma jest równoważna nierówności
$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i + \frac{1}{a_i}\right) \geqslant 2n,$$
gdzie $a_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{x_i+x_{i+1}}$.
9. Przekształcić dowodzoną nierówność do postaci
$$x^2y^2z^2 \geqslant (2x-1)(2y-1)(2z-1).$$
10. Należy dodać stronami cztery nierówności postaci $(a+b-1)^2 \geqslant 0$.
11. Przenieść wszystko na prawą stronę nierówności i zapisać w postaci sumy dwóch kwadratów.
12. Dobrym punktem wyjścia jest nierówność
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+1)(x_i-\frac{1}{2})^2 \geqslant 0.$$
13. Skorzystać z nierówności
$$Sa - a^2 \leqslant \frac{1}{4}S^2, \text{ gdzie } S = a+b+c+d,$$
oraz trzech nierówności analogicznych.