Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2019

Zadania z fizyki nr 678, 679

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

678. Dielektryczna kula spolaryzowana jest jednorodnie, to znaczy momenty dipolowe wszystkich cząsteczek są równe i wzajemnie równoległe.

(a) Znaleźć natężenie pola elektrycznego wewnątrz dielektryka, jeżeli w jednostce objętości znajduje się N cząsteczek, z których każda ma moment dipolowy $p = ql$. Odległość l między ładunkami dipola jest dużo mniejsza od promienia kuli.

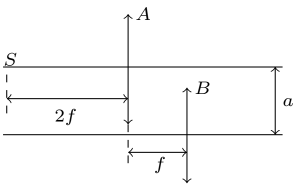
(b) Znaleźć gęstość powierzchniową ładunków indukowanych na powierzchni kuli.

679. Na gładkim lodzie zderzają się sprężyście dwa jednakowe okrągłe kamienie do gry w curling, z których jeden początkowo spoczywa, a drugi porusza się ruchem postępowym. Prosta przechodząca przez środki kamieni podczas zderzenia tworzy kąt $\alpha = \pi/3$ z wektorem prędkości początkowej poruszającego się kamienia. Znaleźć maksymalną część energii układu, która podczas zderzenia przechodzi w energię sprężystej deformacji. Nie ma tarcia między kamieniami.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2019

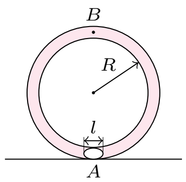
Przypominamy treść zadań:

670. Znaleźć odległość między źródłem światła S i jego obrazem w układzie optycznym przedstawionym na rysunku 1. Ogniskowe soczewek A i B są jednakowe i równe f.



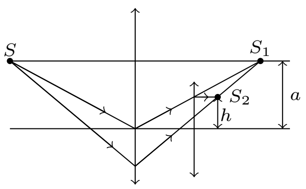
Rys. 1

671. Rurkę o średnicy dużo mniejszej od długości zwinięto w pierścień o promieniu R. Pierścień napełniono wodą, z wyjątkiem niewielkiego odcinka o długości l, gdzie znajduje się kropla oleju, i postawiono pionowo. W chwili początkowej (rys. 2) kropla zaczyna wypływać z punktu A w kierunku punktu B. Znaleźć jej prędkość, gdy mija punkt B. Gęstość wody wynosi ρ_w, oleju $\rho_o < \rho_w$. Długość kropli oleju jest dużo mniejsza od promienia pierścienia. Tarcie zaniedbujemy. Nie zachodzi przesączanie przez olejowy „korek”.



Rys. 2

670. Zgodnie ze wzorem soczewkowym $\frac{1}{f} = \frac{1}{2f} + \frac{1}{y_1}$ obraz S_1 (rys. 3) w pierwszej soczewce A powstaje w odległości $y_1 = 2f$ od tej soczewki. Obraz ten jest przedmiotem pozornym dla soczewki B, położonym w $x_2 = -f$. Oznaczając przez y_2 odległość obrazu S_2 od drugiej soczewki po przejściu światła przez układ, otrzymujemy ze wzoru soczewkowego: $\frac{1}{y_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_2} = \frac{2}{f}$, czyli $y_2 = \frac{f}{2}$. Odległość h punktu S_2 od osi optycznej drugiej soczewki wynika ze wzoru na powiększenie: $\frac{h}{a} = |\frac{y_2}{x_2}| = \frac{1}{2}$. Szukana odległość między przedmiotem S i obrazem S_2 wynosi $d = \sqrt{12{,}25f^2 + 0{,}25a^2}$.



Rys. 3

671. Kropla oleju i wszystkie cząstki wody poruszają się z jednakowymi wartościami prędkości. Oznaczmy przez v szukaną prędkość kropli w chwili, gdy przechodzi ona przez punkt B. W czasie, gdy kropla oleju przemieszcza się z punktu A do B, porcja wody o tej samej objętości przemieszcza się z B do A, czyli obniża się o $2R$. Energia potencjalna pozostałej masy wody nie zmienia się. Zasada zachowania energii ma postać

$$\frac{((2\pi R - l)\rho_w + l\rho_o)v^2}{2} = l(\rho_w - \rho_o)2Rg,$$

stąd $v^2 = \frac{4l(\rho_w - \rho_o)Rg}{2\pi R\rho_w + l(\rho_o - \rho_w)}$. Ponieważ $l \ll R$, to w przybliżeniu $v \approx \sqrt{\frac{2gl(\rho_w - \rho_o)}{\pi\rho_w}}$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 662 ($WT = 2{,}7$), 663 ($WT = 3{,}13$) 664 ($WT = 1{,}7$), 665 ($WT = 2{,}55$) z numerów 9/2018 i 10/2018

Marian Łupieżowiec	Gliwice	41,74
Tomasz Rudny	Poznań	40,29
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Krzysztof Magiera	Łosiów	28,70
Jan Zambrzycki	Białystok	28,39
Michał Koźlik	Gliwice	23,96
Tomasz Wietecha	Tarnów	22,72
Aleksander Surma	Myszków	22,25
Mateusz Kapusta	Wrocław	18,53

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 767 ($WT = 1{,}47$) i 768 ($WT = 2{,}85$) z numeru 10/2018

Piotr Kumor	Olsztyn	46,39
Marcin Małogrosz	Warszawa	42,02
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	40,74
Andrzej Kurach	Ryjewo	40,27
Krzysztof Kamiński	Pabianice	35,75
Paweł Kubit	Kraków	35,69
Michał Adamaszek	Kęty	35,42
Witold Bednarek	Łódź	35,31

Pan Piotr Kumor jest z nami od wielu lat. Jest intensywnie – co jasno widać z rocznych omówień Ligi. I właśnie kończy czternaste okrążenie.

Zadania z matematyki nr 781, 782

Redaguje Marcin E. KUCZMA

781. Dla ustalonych liczb rzeczywistych $b > a > 0$ oraz parzystej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyznaczyć kres górny wartości stosunku A/H, gdzie A i H to (odpowiednio) średnia arytmetyczna i średnia harmoniczna n liczb wybranych dowolnie z przedziału $[a, b]$.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2019

782. Dany jest trójkąt ABC, w którym wysokość opuszczona z wierzchołka C ma długość h. Na każdym odcinku CT, łączącym wierzchołek C z bokiem AB, odkładamy odcinek TP ustalonej długości $d < h$. Uzyskane w ten sposób punkty P tworzą pewną krzywą. Czy – jeśli liczba d jest dostatecznie mała – długość owej krzywej przekroczy długość boku AB?

Zadanie 782 zaproponował pan Adam Woryna

Rozwiązania zadań z numeru 1/2019

Przypominamy treść zadań:

773. Dana jest liczba nieparzysta $n \geqslant 3$. W każde pole kwadratowej planszy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb $-1, +1$, tak że suma wszystkich wpisanych liczb wynosi 1. Wyznaczamy sumę liczb w każdym wierszu oraz sumę liczb w każdej kolumnie; dostajemy ciąg $2n$ liczb nieparzystych. Ile maksymalnie może być w tym ciągu liczb ujemnych?

774. Wyznaczyć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych m, n, że nierówność
$$\lfloor (m+n)a \rfloor + \lfloor (m+n)b \rfloor \geqslant \lfloor ma \rfloor + \lfloor mb \rfloor + \lfloor n(a+b) \rfloor$$
zachodzi dla każdej pary liczb rzeczywistych a, b.

+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	+
−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	+
−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+
−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	+
−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	+
−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	+
−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+
+	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+
+	+	−	−	−	−	−	−	+	+	+
+	+	+	−	−	−	−	−	−	+	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

773. Suma wszystkich wpisanych liczb jest dodatnia, zatem co najmniej jeden wiersz oraz co najmniej jedna kolumna musi mieć sumę dodatnią. W rozważanym ciągu $2n$ sum (wierszy i kolumn) może więc być co najwyżej $2n - 2$ liczb ujemnych.

Dla każdego nieparzystego $n \geqslant 3$ ta wartość jest osiągalna. Ilustracja przedstawia przykładową realizację, gdy $n = 11$. Opis algorytmu: cały skrajny dolny wiersz oraz całą skrajną prawą kolumnę wypełniamy jedynkami. Po odcięciu tego fragmentu zostaje plansza kwadratowa o boku długości parzystej $n-1$. W jej górnym wierszu umieszczamy, kolejno od lewej, $(n-3)/2$ jedynek oraz $(n+1)/2$ minus jedynek. W kolejnych wierszach (planszy $(n-1) \times (n-1)$) powtarzamy ten układ z przesunięciem (w każdym kroku) o jednostkę w prawo; nadwyżkę wychodzącą poza prawy skraj przenosimy przy tym cyklicznie na skrajne lewe pole.

W pełnej planszy $n \times n$ uzyskujemy przewagę minusów nad plusami we wszystkich wierszach i kolumnach z wyjątkiem ostatniego i ostatniej. Każdy z początkowych $n-1$ wierszy ma sumę -1, zaś ostatni wiersz ma sumę n, zatem suma całej tabeli wynosi 1. Stąd, ostatecznie, odpowiedź: szukane maksimum wynosi $2n - 2$.

774. Będziemy używać oznaczenia (wychodzącego z mody): $x - \lfloor x \rfloor = \{x\}$; jest to liczba z przedziału $[0, 1)$. Znane (i łatwe do sprawdzenia) własności tego symbolu:

$$(1)\quad \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \{x\} \geqslant 1/2, \\ 0 & \text{gdy } \{x\} < 1/2 \end{cases} \qquad (\text{dla } x \in \mathbb{R});$$

$$(2)\qquad \{x\} + \{-x\} = 1 \qquad (\text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}).$$

Niech m, n będą dodatnimi liczbami całkowitymi spełniającymi podany w zadaniu warunek. Dla $a = b$ przybiera on postać

$$(3)\qquad 2\lfloor (m+n)a \rfloor \geqslant 2\lfloor ma \rfloor + \lfloor 2na \rfloor.$$

To ma zachodzić dla wszystkich liczb $a \in \mathbb{R}$. Podstawiamy $a = 1/m$ oraz $a = -1/m$ i otrzymujemy

$$2\left\lfloor 1 + \frac{n}{m} \right\rfloor \geqslant 2 + \left\lfloor \frac{2n}{m} \right\rfloor \quad \text{oraz} \quad 2\left\lfloor -1 - \frac{n}{m} \right\rfloor \geqslant -2 + \left\lfloor -\frac{2n}{m} \right\rfloor.$$

Oznaczając $1 + \frac{n}{m} = x_0$, mamy więc

$$2\lfloor x_0 \rfloor \geqslant \lfloor 2x_0 \rfloor \quad \text{oraz} \quad 2\lfloor -x_0 \rfloor \geqslant \lfloor -2x_0 \rfloor.$$

To znaczy, że dla $x = x_0$ oraz dla $x = -x_0$ lewa strona (1) ma wartość niedodatnią. Zgodnie z własnością (1), ta wartość musi być zerem, co ma miejsce jedynie, gdy $\{x_0\} < 1/2$ oraz $\{-x_0\} < 1/2$. Dla tej liczby x_0 nie jest więc spełniona równość (2), co pokazuje, że x_0 jest liczbą całkowitą, czyli że n dzieli się przez m.

Wracamy do nierówności (3) i zauważamy, że dla $a = 1/(2n)$ jej prawa strona jest dodatnia. Wobec tego i lewa strona musi być dodatnia, skąd $(m+n)a = (m+n)/(2n) \geqslant 1$, czyli $m \geqslant n$. Ale n dzieli się przez m. Zatem $m = n$.

Na odwrót, gdy $m = n$, nierówność dana w zadaniu jest spełniona dla wszystkich liczb $a, b \in \mathbb{R}$. By to sprawdzić, oznaczmy $ma = na = A$, $mb = nb = B$; należy pokazać, że

$$(4)\qquad \lfloor 2A \rfloor + \lfloor 2B \rfloor \geqslant \lfloor A \rfloor + \lfloor B \rfloor + \lfloor A + B \rfloor.$$

Przy oznaczeniach $\lfloor A \rfloor = k$, $\{A\} = \alpha$, $\lfloor B \rfloor = l$, $\{B\} = \beta$, zależność (4) jest równoważna następującej:

$$\big(2k + \lfloor 2\alpha \rfloor\big) + \big(2l + \lfloor 2\beta \rfloor\big) \geqslant k + l + \big(k + l + \lfloor \alpha + \beta \rfloor\big);$$

czyli krócej:

$$(5)\qquad \lfloor 2\alpha \rfloor + \lfloor 2\beta \rfloor \geqslant \lfloor \alpha + \beta \rfloor.$$

Jeśli choć jedna z liczb α, β wynosi co najmniej $1/2$, lewa strona (5) wynosi co najmniej 1 i nierówność (5) zachodzi; a jeśli $\alpha, \beta < 1/2$, wówczas obie strony (5) są zerami.

Ostatecznie szukane pary liczb całkowitych $m, n \geqslant 1$ to pary równych liczb.