Geometria na wirującej karuzeli

*Andrzej DRAGAN**

*Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki UW

Artykuł jest fragmentem rozdziału 4 książki „Kwantechizm, czyli klatka na ludzi”, której recenzję zamieściliśmy w poprzednim numerze *Delty*.

Ile wynosi suma wewnętrznych kątów w trójkącie? Kwestia ta nurtowała słynnego matematyka Carla Gaussa na tyle, że zadał sobie trud wspinania się na górskie szczyty. Jak wiadomo szczyty są po to, by je zdobywać, jednak błędem alpinistów jest to, że tę piękną metaforę traktują dosłownie. Gauss jednak nie był alpinistą. Chodził po górach nie po to, by „zdobywać szczyty”, lecz po to, by przy użyciu urządzeń geodezyjnych mierzyć sumę kątów w gigantycznych trójkątach utworzonych z trzech odległych alpejskich wierzchołków. Niestety, istniejące w czasach Gaussa urządzenia pomiarowe nie były wystarczająco precyzyjne, by pozwolić mu wykryć jakiekolwiek odstępstwo od standardowego wyniku szkolnego. Obecnie jednak wiemy, że gdyby tylko Gauss dysponował dokładniejszymi miernikami, przekonałby się, że suma kątów w trójkącie różni się od 180°. Geometria przestrzeni ulega bowiem zaburzeniu za sprawą grawitacji, która, jak wkrótce się przekonamy, jest o wiele dziwniejsza, niż by można przypuszczać.

Żeby zrozumieć, jak to możliwe, wykonajmy w myślach prosty eksperyment. Wyobraźmy sobie nieruchomą, okrągłą karuzelę – jedną z takich, jakie bywają w wesołym miasteczku – z konikami, świnkami i samochodzikami. Gdybyśmy chcieli zmierzyć średnicę karuzeli za pomocą krótkiej linijki, moglibyśmy zrobić to, wielokrotnie przykładając linijkę i licząc, ile razy trzeba odłożyć jej długość, by pokryć całą średnicę. Powiedzmy, że uzyskany wynik to pewna liczba x. W podobny sposób moglibyśmy obmierzyć obwód karuzeli, odkładając kolejno linijkę wzdłuż całego okręgu i uzyskując wynik y. Ze szkolnej geometrii wiadomo, że stosunek obwodu koła do jego średnicy to liczba π. I tyle właśnie wyniesie stosunek zmierzonych wartości y/x. Tymczasem, gdy karuzela będzie się kręcić, a my wraz z nią, wynik ten ulegnie zmianie!

Aby zrozumieć, dlaczego stosunek obwodu koła do jego średnicy w obracającym się układzie odniesienia nie jest równy dokładnie π, musimy przywołać zjawisko skrócenia Lorentza, znane z teorii względności. Przypomnijmy, że polega ono na tym, że poruszające się obiekty stają się krótsze w kierunku swojego ruchu. Oznacza to, że linijka przyłożona wzdłuż obwodu i obracająca się wraz z okrągłą karuzelą, stanie się krótsza, a co za tym idzie, trzeba ją będzie przyłożyć więcej razy, żeby pokryć cały obwód. To zaś zwiększy otrzymaną wartość y. Wartość x charakteryzująca średnicę nie ulegnie natomiast zmianie, bo średnica ustawiona jest prostopadle do prędkości karuzeli. A zatem przykładana do niej linijka nie zmieni swojej długości.

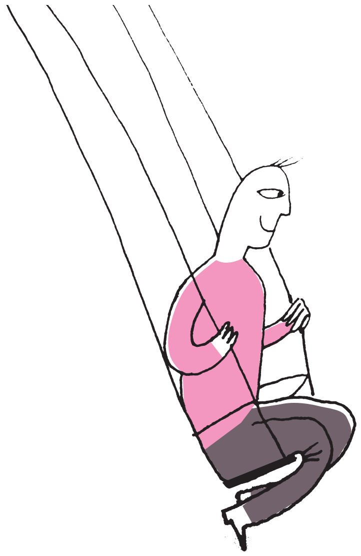
Dla rzeczywistej karuzeli opisany efekt jest praktycznie niemierzalny, ponieważ jej prędkość obrotu jest bardzo mała w porównaniu z prędkością światła. Aby możliwe było zaobserwowanie skrócenia linijki, jej prędkość musiałaby być porównywalna z prędkością światła.

Wniosek jest taki, że gdybyśmy mierzyli obwód i średnicę obracającej się karuzeli w związanym z nią obracającym się układzie odniesienia, to stosunek tych dwóch liczb okaże się większy niż π! A zatem cała szkolna geometria z hukiem upadnie i nawet klasyczny wzór na obwód koła będzie wymagał korekty. Z podobnymi zjawiskami mamy do czynienia także w innych układach odniesienia, które nie są inercjalne.

Uczona w szkole geometria euklidesowa przestaje obowiązywać w sytuacjach, gdy układ odniesienia, w którym się znajdujemy, nie jest inercjalny. Czyli na przykład wtedy, gdy kręcimy się w kółko. W takiej sytuacji ani stosunek obwodu do średnicy okręgu nie musi być równy π, ani suma kątów w trójkącie nie musi wynosić 180°. I tak dalej. W nieinercjalnych układach odniesienia działają różne pozorne siły, takie jak siła odśrodkowa, a ich obecność stanowi czytelne ostrzeżenie, że należy spodziewać się zaburzenia klasycznej geometrii.

Podobnie zresztą dzieje się z upływem czasu w układach nieinercjalnych. Zegar umieszczony dalej od osi obrotu karuzeli musi starzeć się wolniej, niż zegar znajdujący się bliżej osi, bo porusza się on szybciej względem spoczywającego, inercjalnego obserwatora. Oznacza to, że czas w obracającym się układzie odniesienia spowalnia w miarę oddalania się od osi obrotu. Tego typu galimatias pojawia się w sposób nieuchronny, gdy rozważa się nieinercjalne układy odniesienia.

Zresztą bardzo podobne właściwości ma grawitacja, sprawiając że czasoprzestrzeń zmienia swoją geometrię, czyli po prostu się zakrzywia. A mówiąc dokładniej, grawitacja jest zakrzywieniem czasoprzestrzeni. Przyczyna jest taka, że wpływ



grawitacji jest w niewielkich obszarach nieodróżnialny od wpływu przyspieszenia. Wystarczy wyobrazić sobie jazdę w przyspieszającej w górę windzie – może się wydawać, że przez moment stajemy się cięższi, jak gdyby grawitacja przybrała na sile.

Czy można na tej podstawie dowiedzieć się czegoś na temat upływu czasu w polu grawitacyjnym? Zauważyliśmy, że brzeg kręcącej się karuzeli porusza się szybciej niż środek, więc w miarę oddalania się od osi obrotu czas będzie spowalniał coraz bardziej i bardziej. Z punktu widzenia obserwatora kręcącego się wraz z karuzelą, działają na niego siły odśrodkowe skierowane na zewnątrz. Można by więc wnioskować, że gdyby grawitacja mogła być skierowana na zewnątrz jakiegoś ciała – czas spowalniałby coraz bardziej w miarę oddalania się od centrum. Jednak dla rzeczywistych ciał grawitacja skierowana jest zawsze do środka, co oznacza, że czas powinien spowalniać w miarę zbliżania się do grawitującego ciała, a nie oddalania się od niego.

W przypadku Ziemi efekt ten, zwany grawitacyjną dylatacją czasu, jest bardzo słaby i nie odczuwamy go na co dzień. (Chociaż w zasadzie nasze stopy starzeją się nieco wolniej niż nasza głowa.) Efekt ten jest jednak na tyle istotny, że trzeba go uwzględniać w algorytmach systemu GPS. Satelity są wystarczająco daleko od nas, by grawitacyjna dylatacja czasu dawała się im we znaki. I gdyby nie uwzględnienie spowolnienia upływu czasu pod wpływem ziemskiej grawitacji, system GPS myliłby się w określaniu naszego położenia nawet o kilkadziesiąt metrów. Inne, bardzo precyzyjne pomiary pozwalają zresztą wykryć grawitacyjną dylatację czasu na Ziemi na różnicach wysokości rzędu zaledwie kilkunastu centymetrów! Czyli da się doświadczalnie stwierdzić, że czubek naszej głowy starzeje się szybciej niż nasza broda!

Ale dopiero w przypadku czarnych dziur, w pobliżu których grawitacja jest ekstremalnie silna, grawitacyjna dylatacja czasu również przyjmuje ekstremalne wartości. W miarę zbliżania się do horyzontu zdarzeń, odczuwalna siła grawitacji staje się dosłownie nieskończona. Co zaś dzieje się z biegnącym tam czasem? Uwaga, uwaga, czas kompletnie się tam… zatrzymuje! Chyba czas się nad tym zatrzymać i chwilę to przetrawić.

Zatrzymywanie się czasu na horyzoncie zdarzeń czarnej dziury prowadzi do zadziwiających konsekwencji. Gdybyśmy znaleźli się w pobliżu czarnej dziury i wrzucili do niej jabłko – zacznie się ono gwałtownie rozpędzać i po krótkim czasie osiągnie prędkość równą połowie prędkości światła. Jednak w tym momencie stanie się coś dziwnego. Jabłko zamiast dalej się rozpędzać, zacznie hamować! Mimo, że grawitacja ciągnie je coraz mocniej ku czarnej dziurze. Stanie się tak dlatego, że jabłko znajdzie się w obszarze ekstremalnej grawitacyjnej dylatacji czasu. Efekt ten zdominuje cały ruch i za sprawą spowalniającego czasu jabłko zacznie stopniowo zwalniać, aż wreszcie zatrzyma się zupełnie tuż przed samym horyzontem zdarzeń! Z perspektywy obserwatora przyglądającego się wszystkiemu z bezpiecznej odległości jabłko nigdy nie przekroczy horyzontu zdarzeń, mimo że będzie do niego przyciągane z ogromną siłą! Zatrzymanie upływu czasu okaże się bowiem dominujące.

No dobra, ale jakim cudem Gauss nabrał wątpliwości co do zasad geometrii euklidesowej na dobrych kilkadziesiąt lat przed odkryciem teorii względności? Którędy przyszło mu to do głowy? No cóż, był on pod wieloma względami wyjątkowym okazem. Już w podstawówce wsławił się niezwykłymi umiejętnościami matematycznymi. Wieść niesie, że jeden z jego nauczycieli kazał uczniom zsumować wszystkie liczby od 1 do 40, żeby mieć w czasie lekcji chwilę świętego spokoju. Jednak dziewięcioletni Gauss niemal błyskawicznie podał poprawny wynik, co wszystkich wprawiło w konsternację, tym bardziej, że nikt inny nie był w stanie w ogóle podać dobrego wyniku, nawet po długim czasie. Jak to możliwe?

Otóż młody Gaussik zwrócił uwagę na fakt, że 1+40 to dokładnie tyle samo, co 2+39, 3+38, 4+37 i tak dalej. A zatem suma wszystkich liczb od 1 do 40 to po prostu 41×20, czyli 820. Czyli niby taki bystry, a mierzył sumę kątów w trójkątach, mimo że każdy głupi wie, że wynosi ona przecież 180 stopni…

Zadanie od Czytelnika

Jeden z naszych Czytelników prosi o pomoc w rozwiązaniu następującego zadania, za rozwiązanie oferując żywą gęś lub jej równowartość.

Czy istnieje $x \in (0, 1)$ takie, że liczby

$$2^{\frac{x}{3}} \quad \text{oraz} \quad 3^{\frac{x}{2}}$$

są jednocześnie wymierne?

Rozwiązania prosimy przesyłać na adres `delta@mimuw.edu.pl`