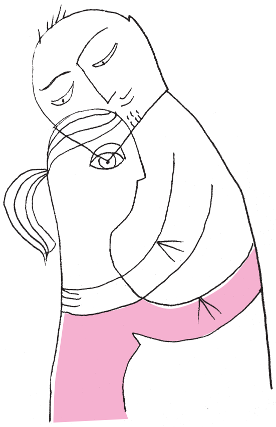
Homeomorfizm

Homeomorfizmy to przekształcenia zachowujące różne własności zbiorów (obiektów geometrycznych). Znaczy to, że pewne cechy obiektu są zachowywane przy „ściskaniu” lub „rozciąganiu”, bez sklejania lub rozcinania, dziurawienia itp. Kulę (np. zrobioną z plasteliny) można w ten sposób przekształcić w sześcian, więc kula i sześcian są homeomorficzne. Kula nie jest homeomorficzna z trójkątem (bo jest za chudy) ani preclem. Za to precel jest homeomorficzny z kubkiem:



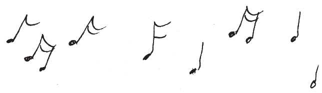
Zbiór liczb niewymiernych (ze zwykłą metryką $\varrho(x,y) = |x-y|$) i zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie są homeomorficzne. Prosta to jeden „kawałek”, bez żadnych dziur, w odróżnieniu od dziurawego zbioru liczb niewymiernych. Formalnie: funkcja ciągła określona na zbiorze liczb rzeczywistych, przyjmująca wartość $\sqrt{2}$ i wartość $\sqrt{5}$ musi też przyjąć wartość $2 \in \left(\sqrt{2}, \sqrt{5}\right)$, która liczbą niewymierną nie jest.

Również zbiór liczb wymiernych i zbiór liczb niewymiernych nie są homeomorficzne choć oba mają nieskończenie wiele „dziur” – nie są równoliczne.

Formalnie: homeomorfizm to różnowartościowe przekształcenie ciągłe jednej przestrzeni metrycznej **na** drugą, którego odwrotne przekształcenie też jest ciągłe. Odcinek $[0,\pi]$ i półokrąg są homeomorficzne, bo jeśli $h(t) = (\cos t, \sin t)$, to h ma wszystkie postulowane własności.

Na zakończenie zadanie. Przyjmijmy, że kształty obok są wykonane z dowolnie ściśliwej plasteliny. Należy znaleźć takie jej rozciąganie i ściskanie (bez rozcinania i sklejania ani zaklejania otworów), które z jednego kształtu pozwoli otrzymać drugi. Odpowiedź można znaleźć w *Deltoidzie* 25 („Zabawy z plasteliną”, Δ^1_{11}) dostępnym na stronie *Delty*.

Michał KRYCH



Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1597. Liczby rzeczywiste a, b spełniają równość
$$\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(b+\sqrt{b^2+1}\right) = 1.$$
Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy $a+b$.
Rozwiązanie na str. 12

M 1598. Różne niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równości
$$a^2 + \frac{1}{a} = b^2 + \frac{1}{b} = c^2 + \frac{1}{c}.$$
Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy $a+b+c$.
Rozwiązanie na str. 22

M 1599. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą oraz $f(x) = x^2 + x + p$. Przypuśćmy, że liczba $f(x)$ jest pierwsza dla każdej dodatniej liczby całkowitej x nie większej od $\sqrt{p/3}$. Wykazać, że liczba $f(x)$ jest pierwsza dla każdej dodatniej liczby całkowitej x nie większej od $p-2$.
Rozwiązanie na str. 15

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 973. Ze stacji kosmicznej wyrzucono dwa nieszczelne pojemniki z tlenem. Pojemniki mają równe pojemności, ale w pierwszym z nich temperatura i ciśnienie resztek gazu są dwa razy większe niż w drugim. Resztki tlenu ulatniają się przez tak samo niedomknięte zawory (pozostawiają takie same otwory w pojemnikach). Jaki jest stosunek szybkości utraty gazu z tych pojemników?
Rozwiązanie na str. 18

F 974. W 1819 roku Pierre Louis Dulong i Alexis Therese Petit na podstawie pomiarów stwierdzili, że molowe ciepła właściwe c_p pierwiastków w stanie stałym są w przybliżeniu równe $c_p \approx 3R$, gdzie $R \approx 8{,}314$ J/(mol·K) oznacza stałą gazową. Jak można wyjaśnić tę prawidłowość (prawo Dulonga–Petita)? Uogólnij to prawo na przypadek związków chemicznych i na tej podstawie wyznacz przybliżoną wartość molowego ciepła właściwego tlenku żelaza FeO.
Rozwiązanie na str. 2