Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2019

Zadania z fizyki nr 676, 677

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

676. Między zwartymi drutem okładkami nienaładowanego kondensatora płaskiego znajduje się punktowy ładunek q. Powierzchnia okładek jest bardzo duża, efekty brzegowe możemy zaniedbać. Odległość ładunku od jednej z okładek jest równa $d/3$, gdzie d jest odległością między okładkami. Jaki ładunek przepłynie przez przewodnik zwierający okładki, gdy ładunek q zostanie przesunięty w miejsce wewnątrz kondensatora, odległe o $d/3$ od drugiej okładki?

677. Oszacuj, jaki musi być minimalny promień planety, aby mogła ona utrzymać atmosferę składającą się głównie z tlenu i azotu, jeśli temperatura powierzchni planety $T = 300$ K. Średnia gęstość planety $\rho = 4\cdot 10^3$ kg/m^3.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2018

Przypominamy treść zadań:

668. Nauczyciel, zwrócony twarzą do tablicy, obserwuje klasę dzięki odbiciu światła od powierzchni szkieł jego okularów. Nauczyciel widzi dwa obrazy ucznia, który siedzi w odległości 5 m od niego. Jeden obraz znajduje się w odległości 5 m, drugi w odległości $\frac{5}{7}$ m od nauczyciela. Po odwróceniu do klasy nauczyciel widzi przez okulary obraz tego samego ucznia w odległości 2,5 m. Wyznaczyć współczynnik załamania szkła, z którego wykonane są soczewki okularów.

669. Do naczynia w kształcie cylindra o polu przekroju poprzecznego S wlano wodę, w której pływa kawałek lodu z kulką ołowianą wewnątrz. Objętość lodu razem z kulką jest równa V. Nad wodę wystaje $\frac{1}{n}$ część tej objętości. Jak zmieni się poziom wody w naczyniu po stopieniu lodu? Gęstości wody, lodu i ołowiu wynoszą odpowiednio ρ_W, ρ_L, ρ_O.

668. Szukany współczynnik załamania możemy znaleźć ze wzoru na zdolność skupiającą soczewki okularów: $D = (n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$, gdzie R_1 i R_2 są promieniami krzywizny powierzchni soczewki. Są one dodatnie, gdy powierzchnia soczewki jest wypukła, i ujemne, gdy powierzchnia jest wklęsła. Odległość ucznia od soczewki jest stała i wynosi $x = 5$ m. Gdy nauczyciel patrzy na ucznia przez okulary, widzi jego obraz pozorny w odległości $y = -2{,}5$ m, stąd $D = \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = -\frac{1}{5\,\mathrm{m}}$. Soczewki okularów są rozpraszające.

Gdy nauczyciel jest odwrócony do tablicy, jeden z obrazów odległy o y_1 powstaje w wyniku odbicia od powierzchni soczewki bliższej oka. Zdolność skupiająca takiego zwierciadła wynosi $D_1 = \frac{1}{x}+\frac{1}{y_1}$. Musimy rozważyć dwa przypadki:

a) $y_1 = -5$ m, $D_1 = 0$, powierzchnia soczewki jest płaska,
b) $y_1 = -\frac{5}{7}$ m, $D_1 = -\frac{6}{5\,\mathrm{m}}$, powierzchnia jest wypukła, czyli $\frac{1}{R_1} = \frac{3}{5\,\mathrm{m}}$.

Drugi obraz obserwowany przez nauczyciela odwróconego do tablicy, odległy od niego o y_2, powstaje w wyniku przejścia światła przez soczewkę, odbiciu od powierzchni o zdolności skupiającej D_2 dalszej od oka i ponownym przejściu przez soczewkę. Zdolność skupiająca takiego układu wynosi

$$2D + D_2 = \frac{1}{x}+\frac{1}{y_2}.$$

Rozważamy ponownie dwa przypadki:

a) $y_2 = -\frac{5}{7}$ m, $D_2 = -\frac{4}{5\,\mathrm{m}}$, $\frac{1}{R_2} = -\frac{2}{5\,\mathrm{m}}$,
b) $y_2 = -5$ m, $D_2 = \frac{2}{5\,\mathrm{m}}$, $\frac{1}{R_2} > 0$.

Przypadek b) musimy odrzucić, bo soczewka szklana dwuwypukła nie może być rozpraszająca. W przypadku a) soczewka jest płasko-wklęsła wykonana ze szkła o współczynniku załamania $n = 1{,}5$.

669. Parcie P na dno naczynia nie zmienia się po stopieniu wody, bo nie zmienia się ciężar zawartości naczynia, a ścianki cylindra są pionowe:

$$P = \rho_W g H_1 S = \rho_W g H_2 S + V_O(\rho_O - \rho_W)g,$$

gdzie H_1 i H_2 oznaczają wysokości słupa wody w naczyniu przed i po stopieniu lodu, V_O jest objętością ołowiu. Różnica wysokości poziomów wody wynosi

$$h = H_1 - H_2 = \frac{V_O(\rho_O-\rho_W)}{S\rho_W}. \tag{1}$$

Ponieważ gęstość ołowiu jest większa od gęstości wody, poziom wody w naczyniu obniży się. Objętość ołowiu możemy znaleźć z warunku równowagi sił działających na pływający lód:

$$(V - V_O)\rho_L + V_O\rho_O = \frac{V\rho_W(n-1)}{n}. \tag{2}$$

Z równań (1) i (2) otrzymujemy szukany wynik:

$$h = \frac{V(\rho_O-\rho_W)(\rho_W(1-\frac{1}{n})-\rho_L)}{S(\rho_O-\rho_L)\rho_W}.$$

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2019

Zadania z matematyki nr 779, 780

Redaguje Marcin E. KUCZMA

779. W pola planszy kwadratowej wpisujemy liczby całkowite (w każde pole jedną liczbę) tak, by liczby wpisane w dowolne dwa przyległe pola były równe lub różniły się o 1 (pola przyległe mają wspólny bok). Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć największą liczbę m taką, że przy każdym wypełnieniu planszy $n \times n$, zgodnym z podanym warunkiem, pewna liczba pojawia się na co najmniej m polach planszy.

780. Ciąg $x_0, x_1, x_2, \ldots$ jest określony wzorami: $x_0 = 1$,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \big(x_n - \sqrt{2n}\big)$ lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

Zadanie 780 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2018

Przypominamy treść zadań:

771. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające równanie

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

dla każdej pary różnych liczb rzeczywistych a, b, których różnica jest liczbą całkowitą.

772. Niech $M_n = 2^n - 1$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Udowodnić, że następujące dwa warunki są równoważne:
(i) $2^n \equiv 2 \pmod{n}$; (ii) $2^{M_n} \equiv 2 \pmod{M_n}$.

771. Dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ uzyskujemy z podanego równania (po podstawieniu $a = x - 1$, $b = x + 1$) równość

$$(1) \qquad 2f'(x) = f(x+1) - f(x-1).$$

Wynika z niej, że funkcja f' jest różniczkowalna. Możemy więc zróżniczkować (1) stronami, otrzymując

$$(2) \qquad 2f''(x) = f'(x+1) - f'(x-1).$$

W równości (1) zastępujemy x przez $x+1$ oraz $x-1$:

$$2f'(x+1) = f(x+2) - f(x),$$
$$2f'(x-1) = f(x) - f(x-2);$$

równość (2) (pomnożona przez 2) przybiera postać

$$(3) \qquad 4f''(x) = f(x+2) - f(x) - f(x) + f(x-2).$$

Widać stąd, że i funkcja f'' ma pochodną. Różniczkujemy (3) stronami:

$$(4) \qquad 4f'''(x) = f'(x+2) - 2f'(x) + f'(x-2).$$

W równaniu danym w założeniach podstawiamy $a = x$, $b = x + 4$, następnie $a = x - 4$, $b = x$ i wreszcie $a = x - 4$, $b = x + 4$, otrzymując kolejno

$$4f'(x+2) = f(x+4) - f(x),$$
$$4f'(x-2) = f(x) - f(x-4),$$
$$8f'(x) = f(x+4) - f(x-4).$$

Równość (4) (pomnożona przez 4) daje w efekcie

$$16f'''(x) = \big(f(x+4) - f(x)\big) - \big(f(x+4) - f(x-4)\big) + \\ + \big(f(x) - f(x-4)\big) = 0.$$

Uzyskana równość zachodzi dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. To znaczy, że f jest wielomianem stopnia najwyżej drugiego.

I na odwrót, każdy taki wielomian $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ spełnia równanie dane w założeniu zadania (i to nawet dla każdej pary różnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$) – co łatwo sprawdzić.

772. Dla $n = 1$ oba warunki są spełnione. Dalej przyjmujemy $n \geqslant 2$. Zapiszmy liczbę $M_n - 1$ jako

$$(5) \qquad M_n - 1 = qn + r; \qquad q, r \in \mathbb{Z}; \quad 0 \leqslant r < n.$$

Wobec określenia $M_n = 2^n - 1$ mamy kongruencję $2^n \equiv 1 \pmod{M_n}$, którą podnosimy do potęgi q: $2^{qn} \equiv 1 \pmod{M_n}$; stąd po pomnożeniu przez 2^r (i uwzględnieniu (5)):

$$(6) \qquad 2^{M_n - 1} \equiv 2^r \pmod{M_n}.$$

Jeśli zachodzi warunek (i), to n jest dzielnikiem liczby $2^n - 2$, równej $M_n - 1$, czyli w równości (5) jest $r = 0$. Ze związku (6) dostajemy $2^{M_n - 1} \equiv 1 \pmod{M_n}$; pomnożenie przez 2 daje warunek (ii).

Na odwrót, jeśli zachodzi warunek (ii), to daną w nim kongruencję $(\mathrm{mod}\ M_n)$ dzielimy stronami przez 2 (to dozwolone, bo M_n jest liczbą nieparzystą), otrzymując $2^{M_n - 1} \equiv 1 \pmod{M_n}$. W połączeniu z (6) dostajemy

$$(7) \qquad 2^r \equiv 1 \pmod{M_n}.$$

Ale $2^r \leqslant 2^{n-1} < M_n$, więc kongruencja (7) jest równością, skąd $r = 0$. To znaczy, w myśl (5), że n dzieli liczbę $M_n - 1 = 2^n - 2$, i mamy warunek (i).

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 765 ($WT = 1{,}78$) i 766 ($WT = 2{,}44$) z numeru 9/2018

Piotr Kumor	Olsztyn	42,07
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Marcin Małogrosz	Warszawa	38,00
Andrzej Kurach	Ryjewo	36,52
Krzysztof Kamiński	Pabianice	35,75
Paweł Kubit	Kraków	35,69