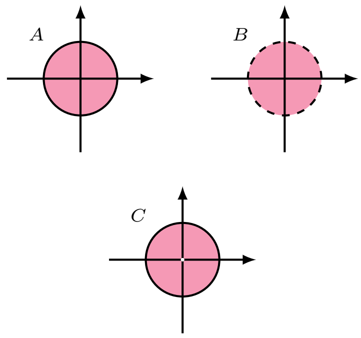
 Co to jest? Co to jest? Co to jest?

W przestrzeniach metrycznych prawdziwe są różne twierdzenia o ciągach zbieżnych i funkcjach ciągłych. Można je dowodzić tylko raz, zamiast w każdym przypadku osobno. W istocie rzeczy nie zostały one wymyślone, lecz odkryte. Pojawiały się w dowodach różnych twierdzeń, np. o istnieniu rozwiązań równań algebraicznych, funkcyjnych, różniczkowych – i w końcu podano definicję ogólną.

Przestrzeniami metrycznymi są także *butelka Kleina*, *przestrzenie rzutowe*, *przestrzenie Łobaczewskiego* i wiele, wiele innych.

Michał KRYCH

Zbiór domknięty i zbiór otwarty



Przypuśćmy, że (X,ρ) jest *przestrzenią metryczną*, czyli zbiorem X, w którym możemy mierzyć odległość między punktami tego zbioru. W przestrzeni metrycznej możemy zdefiniować pojęcie zbioru otwartego i domkniętego. Zacznijmy od przykładu podzbiorów płaszczyzny ze zwykłą, szkolną metryką euklidesową. Rozważmy trzy podzbiory: $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leqslant 1\}$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2<1\}, C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leqslant 1\}\setminus\{(0,0)\}$.

Widzimy, że zbiór A różni się od zbiorów B i C tym, że „nic nie brakuje na brzegu”. Uściślenie „niczego nie brakuje” jest następujące: jeżeli ciąg punktów $p_1,p_2,\ldots$ zbioru A jest *zbieżny* do punktu p płaszczyzny, to punkt p również należy do zbioru A. Zbiory B i C nie mają tej własności. W zbiorze C na przykład ciąg punktów $(1,0),(\frac{1}{2},0),\ldots,(\frac{1}{n},0),\ldots$ jest zbieżny do punktu $(0,0)$, ale ten do zbioru C nie należy. W przypadku zbioru B każdy punkt płaszczyzny należący do okręgu $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2=1\}$ jest *granicą* pewnego zbieżnego ciągu punktów zbioru B, ale do zbioru B nie należy. Powiemy, że zbiór A jest domknięty, a zbiory B i C domknięte nie są.

Definicja. Niech (X,ρ) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że podzbiór $U\subseteq X$ jest **domknięty** w przestrzeni X, jeżeli dla każdego zbieżnego ciągu punktów zbioru U jego granica także należy do U.

Definicja. Niech (X,ρ) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że podzbiór $U\subseteq X$ jest **otwarty** w przestrzeni X, jeżeli zbiór $X\setminus U$ jest domknięty.

Rozważmy podzbiór płaszczyzny ze zwykłą metryką euklidesową. Zbiór E jest otwarty (przerywana linia nie należy do tego zbioru) – dla każdego punktu z tego zbioru można dobrać odpowiedni promień tak, żeby kula w tym punkcie w całości była zawarta w zbiorze E. Zbiór D nie jest otwarty (zawiera punkty na brzegu) – kula o środku na brzegu tego zbioru i dodatnim promieniu nie będzie zawarta z tym zbiorze.

W powyższym przykładzie zbiór A jest domknięty, ale nie jest otwarty, zbiór B nie jest domknięty, ale jest otwarty, zaś zbiór C nie jest ani otwarty, ani domknięty na płaszczyźnie euklidesowej.

W dowolnej przestrzeni metrycznej (X,ρ) możemy zdefiniować pojęcie kuli o środku w punkcie x i promieniu r – jest to po prostu zbiór punktów przestrzeni X odległych od x o ściśle mniej niż r. Zauważmy, że podzbiór $U\subseteq X$ przestrzeni metrycznej (X,ρ) jest otwarty, jeżeli dla każdego punktu $x\in U$ istnieje takie r, że kula o środku w punkcie x i promieniu r jest zawarta w U.

Rozważmy przestrzeń Y składającą się z punktów prostej rzeczywistej o współrzędnych $\frac{1}{n}$, dla każdej liczby naturalnej n. Odległość między punktami $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{m}$ to po prostu moduł ich różnicy $|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}|$. Ta przestrzeń, mimo że odległości między jej punktami są dowolnie małe, także jest dyskretna. Dla dowolnego punktu $\frac{1}{n}$ kula o środku w $\frac{1}{n}$ i promieniu mniejszym od $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ nie zawiera punktów przestrzeni Y, poza środkiem kuli, czyli punktem $\frac{1}{n}$.

Rozważmy jeszcze następujące dwa przykłady. Niech X będzie zbiorem punktów płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych. Na zbiorze X rozważmy metrykę euklidesową. Zauważmy, że w tej przestrzeni metrycznej dowolne dwa punkty są odległe co najmniej o 1, a więc ciągi zbieżne to takie, które są stałe od pewnego miejsca. Wynika z tego, że każdy podzbiór tej przestrzeni metrycznej jest domknięty, zatem każdy podzbiór jest też otwarty. Przestrzeń metryczna o tej własności, że każdy jej podzbiór jest domknięty lub równoważnie każdy jest otwarty, nazywa się **dyskretną**. W przestrzeni dyskretnej w szczególności każdy jednopunktowy podzbiór jest otwarty – dla każdego punktu możemy więc znaleźć taką kulę, że nie ma w niej punktów innych niż jej środek. Stąd nazwa tej przestrzeni: możemy żartobliwie powiedzieć, że każdy punkt przestrzeni ma zapewnioną dyskrecję – nie ma dowolnie bliskich sąsiadów.

Niech $(X,\rho_1),(X,\rho_2)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Metryki ρ_1,ρ_2 nazywa się równoważnymi, jeżeli granice dowolnych ciągów są identyczne z użyciem obu tych metryk.

Na koniec zauważmy, że jeżeli ρ i ρ' są *równoważnymi metrykami* na zbiorze X, to rodziny domkniętych podzbiorów przestrzeni metrycznej (X,ρ) i (X,ρ') są te same. Ta uwaga sugeruje, że pojęcie domkniętości i otwartości zależy od struktury ogólniejszej od metryki – tak jest w istocie, ale to już jest inna opowieść.

Agnieszka BOJANOWSKA