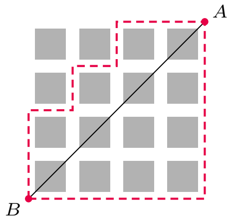
Przestrzeń metryczna

Jeżeli każdej parze elementów danego zbioru (nazwijmy go M) przypiszemy odległość, zwaną także *metryką* (oznaczamy ją przez ϱ), to powstanie **przestrzeń metryczna** (M,ϱ).



Zauważmy, że w otaczającym nas świecie spotykamy inne sposoby mierzenia odległości niż sugerowany przez Euklidesa. Faktyczna odległość, jaką trzeba pokonać w mieście z punktu A do B, na ogół ma niewiele wspólnego z odcinkiem łączącym te punkty (na rysunku obok szare kwadraty można postrzegać jak budynki, a biała przestrzeń to ulice między nimi). Nawet podróżując samolotem, nie przemieszczamy się nigdy po najkrótszej trasie – nie istnieją podziemne międzykontynentalne tunele. Dodatkowo piloci są zobowiązani do poruszania się tzw. korytarzami, a nie np. wzdłuż okręgu przechodzącego przez Warszawę i Nowy York, którego środkiem jest środek kuli ziemskiej.

Odległość przypisana każdej parze elementów ze zbioru M nie może być bylejaka, musi spełniać następujące warunki:

A. $\varrho(a,b)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b$,
B. $\varrho(a,b)=\varrho(b,a)\geqslant 0$ dla dowolnych punktów $a,b\in M$ (*symetria*),
C. $\varrho(a,b)+\varrho(b,c)\geqslant\varrho(a,c)$ dla dowolnych punktów $a,b,c\in M$ (*nierówność trójkąta*).

Postulaty te są dosyć naturalne: odległość między a i b wynosi zero tylko wtedy, gdy a,b są równe; odległość od a do b jest równa odległości od b do a; odległość od a do c nie jest większa od sumy odległości od a do b i od b do c. Przykłady przestrzeni metrycznych:

1. M to zbiór liczb rzeczywistych, a odległość dwóch liczb to wartość bezwzględna ich różnicy.
2. M to zbiór punktów płaszczyzny, a metryka $\varrho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, czyli „zwykła” (Euklidesowa) odległość. Nazwa „nierówność trójkąta” w tym wypadku oznacza, że suma dwóch boków trójkąta jest nie mniejsza od trzeciego boku (mimo że w przypadku równości trudno mówić o trójkącie).
3. M to zbiór punktów płaszczyzny oraz $\varrho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$. To tzw. *metryka miejska*. Przemieszczając się z punktu (x_1,y_1) do punktu (x_2,y_2) w mieście, w którym każde dwie ulice są albo równoległe, albo prostopadłe, przebywamy w jednym kierunku drogę $|x_1-x_2|$, a w prostopadłym $|y_1-y_2|$. Całkowita odległość to suma długości tych tras. Przykładowe najkrótsze trasy między punktem A i B, w tej właśnie metryce, zostały przedstawione na rysunku przerywaną linią.
4. M to zbiór punktów płaszczyzny, a $\varrho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\max(|x_1-x_2|,|y_1-y_2|)$.
5. Podzbiór dowolnej przestrzeni metrycznej jest przestrzenią metryczną – mnóstwo przykładów za darmo.
6. Przestrzenią metryczną jest wstęga Möbiusa (jako podzbiór przestrzeni trójwymiarowej), na której można zdefiniować wiele sposobów mierzenia odległości. Metryką między punktami na tej wstędze może być np. długość najkrótszej (w zwykłym sensie) trasy między nimi, poprowadzonej po powierzchni tej wstęgi.
7. Niech M będzie dowolnym zbiorem. Przyjmując, że odległość punktu od siebie równa jest 0, a odległość różnych punktów to 1, dostajemy tzw. *przestrzeń dyskretną*.
8. Niech M oznacza zbiór wszystkich funkcji ograniczonych o wartościach rzeczywistych (których dziedziną jest X). Odległość $\varrho(f,g)$ między funkcjami f i g definiujemy jako najmniejsze ograniczenie górne (*kres górny*) zbioru złożonego ze wszystkich liczb postaci $|f(x)-g(x)|$, gdzie $x\in X$. Np. niech $X=[-3,3]$, wtedy $\varrho(x^2+1,x^2)=1$, $\varrho(x+3,x-2)=5$, $\varrho(x^2,x-2)=14$.
9. Niech M oznacza zbiór złożony ze wszystkich funkcji ciągłych na przedziale $[a,b]$, których wartościami są liczby rzeczywiste. Definiujemy metrykę $\varrho(f,g)$ jako pole powierzchni $|f-g|$ nad przedziałem $[a,b]$.

W górach „odległość” podaje się zazwyczaj jako przewidywany czas przejścia trasy – 500 metrów spaceru po płaskim jest dużo „bliżej” niż 500 metrów spaceru pod górę. Zauważmy, że taka górska odległość nie definiuje metryki. Nie jest prawdą, że wejście na Gubałówkę zajmie nam tyle samo czasu, co zejście z niej tą samą trasą (nie zachodzi warunek **B**).

Metryki z punktów 2, 3, 4 są *równoważne*, co oznacza, że stwierdzenie $\lim\limits_{n\to\infty}\varrho(p_n,p)=0$ nie zależy od tego, którą z nich mamy na myśli. To samo dotyczy analogicznie zdefiniowanych metryk w przestrzeniach wielowymiarowych. Jeśli rozważymy metryki z punktów 8 i 9 w zbiorze funkcji ciągłych na przedziale $[0,2]$, to jest już inaczej. Niech $f_n(x)=nx$, gdy $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}$, $f_n(x)=2-nx$, gdy $\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant\frac{2}{n}$, oraz $f_n(x)=0$, gdy $\frac{2}{n}\leqslant x\leqslant 2$. Mamy $\varrho(f_n,0)=\frac{1}{n}$ – to pole trójkąta o wysokości 1 i podstawie $\frac{2}{n}$.

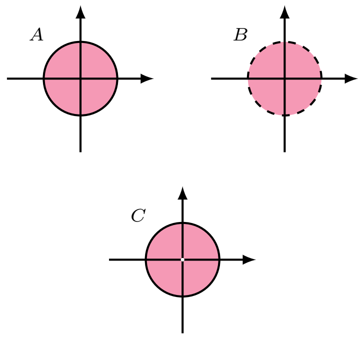
Stąd wynika, że w sensie metryki z przykładu 9. granicą ciągu (f_n) jest funkcja tożsamościowo równa 0. Natomiast odległością funkcji f_n od funkcji tożsamościowo równej zero w sensie metryki z przykładu 8. jest liczba 1, więc ciąg (f_n) nie jest zbieżny do funkcji zerowej względem tej metryki. Można wykazać, że w tej przestrzeni ciąg (f_n) granicy w ogóle nie ma.

W przestrzeniach metrycznych prawdziwe są różne twierdzenia o ciągach zbieżnych i funkcjach ciągłych. Można je dowodzić tylko raz, zamiast w każdym przypadku osobno. W istocie rzeczy nie zostały one wymyślone, lecz odkryte. Pojawiały się w dowodach różnych twierdzeń, np. o istnieniu rozwiązań równań algebraicznych, funkcyjnych, różniczkowych – i w końcu podano definicję ogólną.

Przestrzeniami metrycznymi są także *butelka Kleina*, *przestrzenie rzutowe*, *przestrzenie Łobaczewskiego* i wiele, wiele innych.

Michał KRYCH

Zbiór domknięty i zbiór otwarty



Przypuśćmy, że (X,ρ) jest *przestrzenią metryczną*, czyli zbiorem X, w którym możemy mierzyć odległość między punktami tego zbioru. W przestrzeni metrycznej możemy zdefiniować pojęcie zbioru otwartego i domkniętego. Zacznijmy od przykładu podzbiorów płaszczyzny ze zwykłą, szkolną metryką euklidesową. Rozważmy trzy podzbiory: $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leqslant 1\}$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2<1\}, C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leqslant 1\}\setminus\{(0,0)\}$.

Widzimy, że zbiór A różni się od zbiorów B i C tym, że „nic nie brakuje na brzegu”. Uściślenie „niczego nie brakuje” jest następujące: jeżeli ciąg punktów $p_1, p_2, \ldots$ zbioru A jest *zbieżny* do punktu p płaszczyzny, to punkt p również należy do zbioru A. Zbiory B i C nie mają tej własności. W zbiorze C na przykład ciąg punktów $(1,0),(\frac{1}{2},0),\ldots,(\frac{1}{n},0),\ldots$ jest zbieżny do punktu $(0,0)$, ale ten do zbioru C nie należy. W przypadku zbioru B każdy punkt płaszczyzny należący do okręgu $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2=1\}$ jest *granicą* pewnego zbieżnego ciągu punktów zbioru B, ale do zbioru B nie należy. Powiemy, że zbiór A jest domknięty, a zbiory B i C domknięte nie są.

Definicja. Niech (X,ρ) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że podzbiór $U\subseteq X$ jest **domknięty** w przestrzeni X, jeżeli dla każdego zbieżnego ciągu punktów zbioru U jego granica także należy do U.

Definicja. Niech (X,ρ) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że podzbiór $U\subseteq X$ jest **otwarty** w przestrzeni X, jeżeli zbiór $X\setminus U$ jest domknięty.

W powyższym przykładzie zbiór A jest domknięty, ale nie jest otwarty, zbiór B nie jest domknięty, ale jest otwarty, zaś zbiór C nie jest ani otwarty, ani domknięty na płaszczyźnie euklidesowej.

Rozważmy podzbiór płaszczyzny ze zwykłą metryką euklidesową. Zbiór E jest otwarty (przerywana linia nie należy do tego zbioru) – dla każdego punktu z tego zbioru można dobrać odpowiedni promień tak, żeby kula w tym punkcie w całości była zawarta w zbiorze E. Zbiór D nie jest otwarty (zawiera punkty na brzegu) – kula o środku na brzegu tego zbioru i dodatnim promieniu nie będzie zawarta z tym zbiorze.

W dowolnej przestrzeni metrycznej (X,ρ) możemy zdefiniować pojęcie kuli o środku w punkcie x i promieniu r – jest to po prostu zbiór punktów przestrzeni X odległych od x o ściśle mniej niż r. Zauważmy, że podzbiór $U\subseteq X$ przestrzeni metrycznej (X,ρ) jest otwarty, jeżeli dla każdego punktu $x\in U$ istnieje takie r, że kula o środku w punkcie x i promieniu r jest zawarta w U.

Rozważmy przestrzeń Y składającą się z punktów prostej rzeczywistej o współrzędnych $\frac{1}{n}$, dla każdej liczby naturalnej n. Odległość między punktami $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{m}$ to po prostu moduł ich różnicy $|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}|$. Ta przestrzeń, mimo że odległości między jej punktami są dowolnie małe, także jest dyskretna. Dla dowolnego punktu $\frac{1}{n}$ kula o środku w $\frac{1}{n}$ i promieniu mniejszym od $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ nie zawiera punktów przestrzeni Y, poza środkiem kuli, czyli punktem $\frac{1}{n}$.

Rozważmy jeszcze następujące dwa przykłady. Niech X będzie zbiorem punktów płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych. Na zbiorze X rozważmy metrykę euklidesową. Zauważmy, że w tej przestrzeni metrycznej dowolne dwa punkty są odległe co najmniej o 1, a więc ciągi zbieżne to takie, które są stałe od pewnego miejsca. Wynika z tego, że każdy podzbiór tej przestrzeni metrycznej jest domknięty, zatem każdy podzbiór jest też otwarty. Przestrzeń metryczna o tej własności, że każdy jej podzbiór jest domknięty lub równoważnie każdy jest otwarty, nazywa się **dyskretną**. W przestrzeni dyskretnej w szczególności każdy jednopunktowy podzbiór jest otwarty – dla każdego punktu możemy więc znaleźć taką kulę, że nie ma w niej punktów innych niż jej środek. Stąd nazwa tej przestrzeni: możemy żartobliwie powiedzieć, że każdy punkt przestrzeni ma zapewnioną dyskrecję – nie ma dowolnie bliskich sąsiadów.

Niech $(X,\rho_1),(X,\rho_2)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Metryki ρ_1,ρ_2 nazywa się równoważnymi, jeżeli granice dowolnych ciągów są identyczne z użyciem obu tych metryk.

Na koniec zauważmy, że jeżeli ρ i ρ' są *równoważnymi metrykami* na zbiorze X, to rodziny domkniętych podzbiorów przestrzeni metrycznej (X,ρ) i (X,ρ') są te same. Ta uwaga sugeruje, że pojęcie domkniętości i otwartości zależy od struktury ogólniejszej od metryki – tak jest w istocie, ale to już jest inna opowieść.

Agnieszka BOJANOWSKA