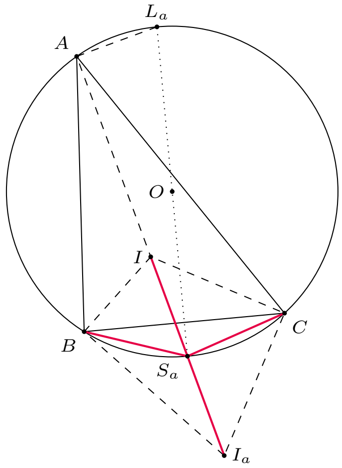
Twierdzenie o trójzębie

Bartłomiej BZDĘGA

Opiszmy okrąg o na trójkącie ABC. Niech S_a będzie środkiem łuku BC niezawierającego punktu A, zaś L_a – środkiem drugiego łuku BC. Odcinek L_aS_a jest oczywiście średnicą okręgu o, na której leży symetralna odcinka BC. Łuki BS_a i CS_a są równej długości, więc kąty wpisane na nich oparte mają jednakową miarę, czyli prosta AS_a jest dwusieczną kąta BAC. Jeżeli $L_a \neq A$, to $|\sphericalangle L_aAS_a| = 90°$, więc prosta AL_a jest dwusieczną kąta zewnętrznego A trójkąta ABC.



Oznaczmy przez I środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz miary kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A, B, C odpowiednio przez α, β, γ. Wówczas $|\sphericalangle BS_aI| = \gamma$ oraz $|\sphericalangle IBS_a| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, więc $|\sphericalangle BIS_a| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = |IBS_a|$, co daje równość $|IS_a| = |BS_a| = |CS_a|$, znaną pod nazwą *twierdzenie o trójliściu*. Niech I_a będzie środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC, stycznego do odcinka BC. Punkty A, I, I_a leżą na jednej prostej, a ponadto $|\sphericalangle IBI_a| = 90°$, więc II_a jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie IBI_a. To pozwala uzupełnić twierdzenie o trójliściu:

$$|I_aS_a| = |IS_a| = |BS_a| = |CS_a|.$$

Nazywamy to *twierdzeniem o trójzębie.*

Zadania

1. Sformułować i udowodnić twierdzenie o trójzębie dla dwusiecznej kąta zewnętrznego.

2. Wysokości nierównoramiennego, ostrokątnego trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Punkt S jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie BCH, który zawiera punkt H. Wyznaczyć miarę kąta BAC, jeśli spełniona jest równość $|AH| = |AS|$.

3. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina odcinek BC w punkcie D. Symetralna odcinka AD przecina proste BI oraz CI odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I.

4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $|AB| < |AC|$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku BC. Udowodnić, że prosta przechodząca przez środki okręgów opisanych na trójkątach ABC i ADM jest równoległa do prostej AD.

5. W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku I. Proste AI i BI przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P i Q, różnych od A i B. Punkt F jest takim punktem, że czworokąt $CPFQ$ jest równoległobokiem. Dowieść, że jeśli $I \neq F$, to $|\sphericalangle CIF| = 90°$.

6. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinków BC, CA, AB w punktach odpowiednio D, E, F. Niech J_a, J_b i J_c będą odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BDF, CDE. Prosta ℓ_a jest symetryczna do prostej BC względem prostej J_bJ_c, analogicznie określamy proste ℓ_b i ℓ_c. Dowieść, że proste ℓ_a, ℓ_b i ℓ_c przecinają się w jednym punkcie.

7. Długości boków pewnego trójkąta różnobocznego stanowią ciąg arytmetyczny. Wykazać, że prosta łącząca środek okręgu opisanego i wpisanego w ten trójkąt jest prostopadła do dwusiecznej pewnego kąta wewnętrznego w tym trójkącie.

8. Trójkąt wpisany jest w okrąg o promieniu R i opisany na trójkącie o promieniu r. Odległość między środkami tych okręgów jest równa d. Dowieść, że $d^2 = R(R - 2r)$ (twierdzenie Eulera).

Wskazówki do zadań

1. Należy wykazać, że $|BL_a| = |CL_a| = |I_bL_a| = |I_cL_a|$, wykonując obliczenia na kątach.

2. Prosta HS jest dwusieczną $\sphericalangle AHC$, z czego można otrzymać $|\sphericalangle AHS| = \frac{\alpha}{2} + \gamma$, a dalej $|\sphericalangle CAS| = 90° - \beta$. Dodatkowo punkt S leży na symetralnej odcinka BC, więc jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

3. Punkt Q leży na okręgu opisanym na trójkącie ACD. Stąd można wykazać, że $|\sphericalangle QPI| = |\sphericalangle QDI|$.

4. Odcinki L_aD i L_aS_a są średnicami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach ADM i ABC.

5. Stosując dwukrotnie twierdzenie o trójliściu przekonujemy się, że prosta PQ jest symetralną odcinka CI. Ponadto trójkąty IPQ i FPQ są przystające, co daje $IF \parallel PQ$.

6. Uzasadnić, że punkty J_a, J_b i J_c są środkami łuków EF, FD, DE okręgu opisanego na trójkącie DEF. Punkt F i środek S okręgu wpisanego w trójkąt DEF są symetryczne względem prostej J_aJ_b (por. poprzednie zadanie), więc ℓ_a przechodzi przez punkt S.

7. Niech $2|BC| = |AB| + |AC|$. Zastosować twierdzenie Ptolemeusza dla czworokąta ABS_aC oraz twierdzenie o trójliściu, by wykazać, że punkt I jest środkiem odcinka AS_a.

8. Niech P będzie rzutem prostokątnym punktu I na odcinek AB. Trójkąty API oraz L_aBS_a są podobne, więc $\frac{|AI|}{|L_aS_a|} = \frac{|PI|}{|BS_a|}$. Po zastosowaniu twierdzenia o trójliściu i przekształceniach otrzymamy $|AI| \cdot |S_aI| = 2Rr$. Z drugiej strony, $-|AI| \cdot |S_aI|$ jest potęgą punktu I względem okręgu opisanego na trójkącie ABC, czyli wynosi $d^2 - R^2$.