Sumy kwadratów wielomianów

*Maria GAŁUSZKA**

*studentka, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

Suma kwadratów najczęściej kojarzy się nam z twierdzeniem Pitagorasa – słusznie, ale warto wiedzieć, że temat ten ma swoje miejsce również w teorii liczb, gdzie interesuje nas, czy daną liczbę całkowitą można przedstawić w postaci sumy kwadratów innych liczb całkowitych. Intrygujące jest również pytanie, ile składników znajduje się w tej sumie. Osiągnięcia w tym zakresie mieli między innymi Fermat, Euler i Lagrange. Fermat wysnuł hipotezę, że każda liczba pierwsza postaci $4k+1$ jest sumą dwóch kwadratów, co udowodnił Euler. Istnieje twierdzenie, które podaje, jakie warunki musi spełniać liczba naturalna, aby była sumą dwóch kwadratów.

Twierdzenie 1. *Liczbę naturalną można przedstawić w postaci sumy dwóch kwadratów wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej czynnik pierwszy postaci $4k+3$ występuje w parzystej potędze.*

Przykłady:

$$3 \cdot 3 \cdot 5 = 45 = 3^2 + 6^2, \quad 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 392 = 14^2 + 14^2.$$

Niektóre liczby wymagają trzech kwadratów:

$$7 \cdot 3 \cdot 4 = 84 = 2^2 + 4^2 + 8^2, \quad 2 \cdot 5 \cdot 31 = 310 = 15^2 + 9^2 + 2^2.$$

Czytelniku, dlaczego liczby obok nie są sumami dwóch kwadratów liczb całkowitych?

A gdybyśmy chcieli przedstawić dowolną liczbę naturalną jako sumę kwadratów? Czy da się to zrobić dla każdej liczby naturalnej? I czy możemy oszacować liczbę składników w takiej sumie? Okazuje się, że bez zakładania dodatkowych warunków trzy kwadraty to również za mało. W 1770 roku Lagrange udowodnił następujące

Twierdzenie 2 (Lagrange, 1770)**.** *Każda liczba naturalna da się przedstawić w postaci sumy czterech kwadratów liczb naturalnych.*

Oczywiście, twierdzenie Lagrange'a można zmodyfikować na różne sposoby, na przykład zmieniając postać składników. Istnieją odpowiednie twierdzenia związane z przedstawieniem liczby naturalnej jako sumy sześcianów. Jest również teoria związana z twierdzeniem Waringa, w którym pytamy o najmniejszą potrzebną liczbę składników w sumie k-tych potęg, aby móc otrzymać w wyniku dowolną liczbę naturalną. Jednak w naszych dociekaniach zostaniemy przy kwadratach. Jeżeli chodzi o przedstawienie liczby naturalnej jako sumy kwadratów, to właściwie twierdzenie Lagrange'a wyczerpuje temat.

Wątek teorii liczb jest tylko wstępem do rozważań nieco innych. Kto powiedział, że sumy kwadratów możemy rozpatrywać tylko w kontekście liczb? Dlaczego zamiast nich nie możemy wziąć pod uwagę innych obiektów matematycznych – na przykład wielomianów? Problemem przedstawienia wielomianu jako sumy kwadratów innych wielomianów jako pierwszy zajął się David Hilbert. Sformułował on następujące

Nieujemna określoność oznacza, że wielomian przyjmuje tylko wartości nieujemne. Oczywiście, każdy wielomian będący sumą kwadratów wielomianów jest nieujemnie określony.

Pytanie: Czy z nieujemnej określoności wielomianu wynika to, że możemy przedstawić go jako sumę kwadratów wielomianów?

Rozważmy proste wersje tego problemu. Weźmy pod lupę najpierw wielomiany jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych, których zbiór oznaczymy przez $\mathbb{R}[X]$.

Twierdzenie 3. *Niech $W \in \mathbb{R}[X]$ będzie nieujemnie określony. Wówczas $W = W_1^2 + W_2^2$ dla pewnych $W_1, W_2 \in \mathbb{R}[X]$.*

Dowód: Załóżmy, że $W \in \mathbb{R}[X]$ jest nieujemnie określony. Z Zasadniczego Twierdzenia Algebry wynika, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych jest iloczynem wielomianów rzeczywistych pierwszego i drugiego stopnia. Ponieważ W jest nieujemnie określony, więc można go przedstawić jako iloczyn nieujemnie określonych wielomianów drugiego stopnia (Czytelniku, dlaczego?). Można go zatem zapisać w postaci

$$W(X) = c \cdot (X^2 + a_1 X + b_1)^2 \cdot \ldots \cdot (X^2 + a_n X + b_n),$$

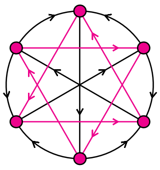
gdzie $c > 0$ oraz wyróżnik każdego kwadratowego czynnika jest niedodatni.

Rozwiązanie zadania M 1596.
Odpowiedź. $n \neq 4$.

Nazwijmy *mistrzowskim* taki n-turniej, w którym każdy jest mistrzem. Udowodnimy, że jeśli istnieje mistrzowski n-turniej, to istnieje mistrzowski $(n+2)$-turniej.

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będą zawodnikami pewnego mistrzowskiego n-turnieju, a B i C takimi dwoma dodatkowymi zawodnikami, że B wygrał z C, a ponadto A_i wygrał z B i przegrał z C dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas $(n+2)$-turniej powstały przez dołączenie zawodników B i C jest mistrzowski.

Nietrudno sprawdzić, że 3-turniej złożony z zawodników A, B, C takich, że A wygrał z B, B wygrał z C, C wygrał z A, oraz 6-turniej pokazany na poniższym rysunku (punkty oznaczają zawodników, a strzałka z A do B, że A wygrał z B) są mistrzowskie. W połączeniu z konkluzją poprzednich dwóch akapitów prowadzi to do wniosku, że n-turniej mistrzowski istnieje dla każdej liczby nieparzystej $n \geqslant 3$ oraz dla każdej liczby parzystej $n \geqslant 6$.



Pozostaje udowodnić, że nie istnieje mistrzowski 4-turniej. Przypuśćmy, że jednak istnieje, i oznaczmy zawodników przez A, B, C, D w taki sposób, że A wygrał z B, C wygrał z D oraz (bez straty ogólności) B wygrał z D. Wówczas, skoro D jest mistrzem, to D musiał pośrednio wygrać z C – jedyna możliwość jest taka, że D wygrał z A, a A wygrał z C. Jednak wówczas ten z zawodników B, C, który przegrał mecz między nimi, nie miał jak wygrać pośrednio z tym drugim – sprzeczność.

Wykorzystując przedstawienie trójmianu kwadratowego w postaci kanonicznej, dostajemy
$$X^2 + a_kX + b_k = \left(X + \frac{a_k}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{-\Delta}^2, \qquad \text{gdzie } \Delta = a_k^2 - 4b_k \leqslant 0.$$
Stąd
$$W = (p_1^2 + q_1^2) \cdot \ldots \cdot (p_n^2 + q_n^2),$$
gdzie $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}[X]$. Dalej korzystamy z tożsamości
$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2.$$
Następnie przekształcamy nasz iloczyn zgodnie z powyższą równością, aż będzie on równy sumie kwadratów pewnych wielomianów $W_1, W_2 \in \mathbb{R}[X]$. $\square$

Naturalnie, pojawia się pytanie, czy analogiczne twierdzenie zachodzi dla wielomianów dwóch zmiennych o współczynnikach rzeczywistych (których zbiór oznaczać będziemy przez $\mathbb{R}[X_1, X_2]$). Okazuje się, że nie, a chcąc udowodnić ten fakt, można posłużyć się kontrprzykładem. Wielomian
$$W(X_1, X_2) = 1 - 3X_1^2X_2^2 + X_1^2X_2^4 + X_1^4X_2^2 \in \mathbb{R}[X_1, X_2],$$
nazywany **wielomianem Motzkina**, był pierwszym przykładem dodatnio określonego wielomianu, który nie jest sumą kwadratów innych wielomianów. Pojawił się stosunkowo późno, bo dopiero w 1967 roku. Jego dodatnia określoność jest konsekwencją nierówności pomiędzy średnimi – średnią arytmetyczną i średnią geometryczną. Mamy
$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} \qquad \text{dla dowolnych } a, b, c > 0.$$
Podstawiając $a = X_1^4X_2^2,\ b = X_1^2X_2^4,\ c = 1$ otrzymujemy
$$W(X_1, X_2) = 1 - 3X_1^2X_2^2 + X_1^2X_2^4 + X_1^4X_2^2 \geqslant 0\ .$$
Wykażemy teraz, że W nie jest sumą kwadratów wielomianów. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że W jest sumą pewnych k kwadratów, czyli
$$W = \sum_{i=1}^{k} W_i^2, \qquad W_i \in \mathbb{R}[X_1, X_2].$$
Z tej racji, że stopień wielomianu W jest równy 6, to stopień każdego z wielomianów W_i jest równy co najwyżej 3. Stąd każdy wielomian W_i składa się z wielomianów
$$1,\ X_1,\ X_2,\ X_1^2,\ X_2^2,\ X_1X_2,\ X_1^3,\ X_2^3,\ X_1^2X_2,\ X_1X_2^2$$
z pewnymi rzeczywistymi współczynnikami. Zauważmy, że $X_1^2, X_2^2, X_1^4, X_2^4, X_1^6, X_2^6$ nie występują w jawnej postaci wielomianu W, więc składniki $X_1,\ X_2,\ X_1^2,\ X_2^2,\ X_1^3,\ X_2^3$ nie mogą występować w żadnym z W_i. Stąd
$$W_i = a_i + b_iX_1X_2 + c_iX_1^2X_2 + d_iX_1X_2^2$$
dla pewnych liczb rzeczywistych a_i, b_i, c_i, d_i. Wtedy jednak $\sum_{i=1}^k b_i^2 = -3$, co daje sprzeczność; wielomianu Motzkina nie można zatem przedstawić w postaci sumy kwadratów wielomianów dwóch zmiennych.

Widzimy więc, że odpowiedź na pytanie Hilberta jest negatywna, choć są również „częściowo pozytywne” wyniki, jak poniższy:

Twierdzenie 4 (Hilbert, 1888)**.** *Niech $W \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ będzie nieujemnie określonym wielomianem stopnia 4. Wtedy W jest sumą trzech kwadratów z $\mathbb{R}[X_1, X_2]$.*

Skoro nie każdy nieujemnie określony wielomian możemy zapisać jako sumę kwadratów innych wielomianów, spróbujmy poszerzyć zakres naszych poszukiwań – zamiast wielomianów zapytajmy o *ilorazy* wielomianów, czyli tak zwane *funkcje wymierne.* W pewnym sensie są one dla wielomianów tym samym, czym liczby wymierne dla liczb całkowitych. Zbiór funkcji wymiernych n zmiennych oznaczać będziemy przez $\mathbb{R}(X_1, \ldots, X_n)$. W tym kontekście odpowiedzi na nasze pytania dostarcza poniższe

Sława przedstawionego wyniku Artina wiąże się z faktem, że odpowiada on na 17. ze słynnej listy 23 problemów Hilberta zaprezentowanej w 1900 roku na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu. Pytanie brzmiało: *Czy każdy wielomian nieujemnie określony może być przedstawiony jako iloraz sum kwadratów wielomianów?* Odpowiedź jest twierdząca, gdyż suma kwadratów funkcji wymiernych jest ilorazem sum kwadratów wielomianów.

Twierdzenie 5 (Artin, 1927)**.** *Niech wielomian W będzie nieujemnie określony. Wtedy W jest sumą kwadratów z $\mathbb{R}(X_1, \ldots, X_n)$.*

Po opublikowaniu wyniku Artina pojawiły się inne pytania. Jak dużo kwadratów jest w rozkładzie na sumę? Jeden z wyników w tym zakresie należy do Hilberta.

Twierdzenie 6 (Hilbert, 1893)**.** *Niech wielomian $W \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ będzie nieujemnie określony. Wtedy W jest sumą czterech kwadratów z $\mathbb{R}(X_1, X_2)$.*

Naturalne jest pytanie, czy możemy wzmocnić to twierdzenie przez zapisanie dodatnio określonego wielomianu jako sumy trzech kwadratów funkcji wymiernych. Odpowiedź jest negatywna i z pomocą jako kontrprzykład ponownie przychodzi nam wielomian Motzkina – tym razem jednak uzasadnienie nie jest elementarne i korzysta z dziedziny zwanej geometrią algebraiczną.

Twierdzenie 7 (Cassels–Ellison–Pfister, 197)**.** *) Wielomian Motzkina nie jest sumą trzech kwadratów z $\mathbb{R}(X_1, X_2)$.*

Okazuje się, że wielomian Motzkina nie jest w tym sensie wyjątkowy. Jean-Louis Colliot–Thélène pokazał w 1993 roku, że w zbiorze wielomianów stopnia co najmniej 6 te, które można przedstawić w postaci sumy trzech kwadratów funkcji wymiernych, stanowią pomijalny zbiór zarówno z topologicznego, jak i teoriomiarowego punktu widzenia; szczegóły można znaleźć na przykład w artykule Oliviera Benoista: *Writing Positive Polynomials as Sums of (Few) Squares.*

Teraz wróćmy do liczby składników w przypadku dowolnej liczby zmiennych. O tym, jak można ją oszacować dla funkcji wymiernych n zmiennych, mówi poniższe twierdzenie Pfistera.

Twierdzenie 8 (Pfister, 1967)**.** *Niech wielomian $W \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ będzie nieujemnie określony. Wtedy W jest sumą 2^n kwadratów z $\mathbb{R}(X_1, \ldots, X_n)$.*

Nasuwa się kolejne pytanie: czy ograniczenie 2^n może zostać poprawione? Innymi słowy, czy istnieje nieujemnie określony wielomian z $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, który nie jest sumą $2^n - 1$ kwadratów z $\mathbb{R}(X_1, \ldots, X_n)$? Dylemat ten został sformułowany przez Albrechta Pfistera zaraz po opublikowaniu dowodu, że liczba składników 2^n jest wystarczająca. Na chwilę obecną wiadomo jedynie, że $n + 1$ to za mało. Jak widać, choć siedemnasty problem Hilberta został rozwiązany już w 1927 roku, to temat związany z tym zagadnieniem jest pełen kwestii nierozstrzygniętych. Do zrobienia wciąż pozostaje wiele, a zaprezentowane tutaj twierdzenia są tylko częścią większej układanki.

Lodowa maszyna cieplna

Krzysztof REJMER

Znane powiedzenie mówi, że istnieją dwie szkoły: otwocka oraz falenicka. Jedna na pewno jest lepsza, druga oczywiście gorsza; sęk w tym, że nie wiadomo, która jest jaka.

Nie inaczej bywa i w fizyce. Można podać wiele przykładów, choćby termodynamikę. Jedni są zafascynowani jej formalizmem matematycznym (czytaj – formami różniczkowymi), drudzy bardziej zachwycają się fizyczną treścią i pomysłowością dowodów korzystających z własności cykli Carnota. Ten artykuł traktuje o specyficznym cyklu Carnota i jeśli jest deklaracją przynależności autora do jakiejś szkoły, to niechybnie będzie nią szkoła z Glasgow. (Jak zatem będzie brzmiał właściwy przymiotnik?)

Z doświadczenia wiemy, że zamarzająca woda zwiększa swoją objętość. Dlatego czasami pękają źle zabezpieczone rury, a w górach woda zamarzająca w skalnych szczelinach kruszy najmocniejsze nawet skały, przyspieszając procesy erozji. Wykorzystamy fakt zmiany objętości cieczy podczas przemiany fazowej do ataku na drugą zasadę termodynamiki, by potem (niczym strażak, który podpala, żeby gasić) dzielnie ją obronić. Zbudujmy zatem cykl pokazany na rysunku na następnej stronie; nazwiemy ów cykl *lodową maszyną cieplną.*

Cylinder zamknięty ruchomym tłokiem (jak zwykle w tego rodzaju dyskusjach przyjmujemy, że tłok porusza się bez tarcia) wypełniony jest wodą o temperaturze równej temperaturze krzepnięcia. Na zewnątrz tłoka znajduje się powietrze o normalnym ciśnieniu atmosferycznym. Na tłoku (A) stawiamy ciało o masie m. Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym

Rozwiązanie zadania M 1595.
a) Przypuśćmy, że w pewnym n-turnieju jest dokładnie dwóch mistrzów i oznaczmy ich przez A, B w taki sposób, że A wygrał z B.

Niech $\mathcal{C}$ będzie zbiorem zawodników, którzy wygrali z A, a $\mathcal{B}$ – zbiorem zawodników, którzy przegrali z A. Skoro B jest mistrzem oraz $B \in \mathcal{B}$, to istnieje zawodnik pokonany przez B, który wygrał z A – wynika stąd w szczególności, że zbiór $\mathcal{C}$ jest niepusty.

Ograniczając turniej do meczów rozegranych między zawodnikami ze zbioru $\mathcal{C}$, możemy na mocy poprzedniego zadania wskazać zawodnika C, który jest mistrzem w zbiorze $\mathcal{C}$. Zawodnik C wygrał pośrednio lub bezpośrednio ze wszystkimi pozostałymi zawodnikami w $\mathcal{C}$ oraz wygrał bezpośrednio z A, więc wygrał pośrednio ze wszystkimi zawodnikami w $\mathcal{B}$. To oznacza, że C jest mistrzem w całym turnieju, co przeczy założeniu, że mistrzów jest dokładnie dwóch.

b) Rozważmy turniej, w którym A, B, C są takimi zawodnikami, że A wygrał z B, B wygrał z C oraz C wygrał z A, a każdy z pozostałych $n-3$ zawodników przegrał z każdym spośród A, B, C (wyniki meczów pomiędzy tymi $n-3$ zawodnikami mogą być dowolne). W tym turnieju A, B, C są jedynymi mistrzami (nikt z pozostałych nie wygrał z żadnym z nich) i jest ich trzech.

Rozwiązanie zadania M 1594.
Niech A będzie dowolnym zawodnikiem, który wygrał *najwięcej* meczów. Udowodnimy, że A jest mistrzem.

Oznaczmy przez $\mathcal{B}$ zbiór zawodników, którzy przegrali z A, a przez $\mathcal{C}$ zbiór zawodników, którzy wygrali z A. Jeżeli zbiór $\mathcal{C}$ jest pusty, to A wygrał ze wszystkimi bezpośrednio, więc jest mistrzem.

Przypuśćmy, że istnieje zawodnik $C \in \mathcal{C}$, który wygrał z każdym zawodnikiem z $\mathcal{B}$. Wówczas C wygrał ze wszystkimi zawodnikami pokonanymi przez A oraz z samym A, więc ma na koncie więcej zwycięstw niż A, a to przeczy wyborowi zawodnika A. Wobec tego dla każdego $C \in \mathcal{C}$ istnieje $B \in \mathcal{B}$ o tej własności, że B wygrał z C, a to oznacza, że A jest mistrzem.