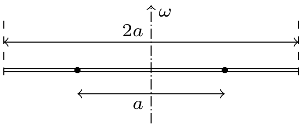
# Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

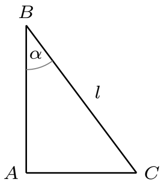
### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

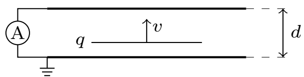
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2019



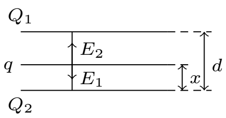
Rys. 1



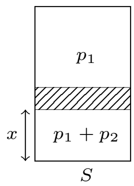
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

## Zadania z fizyki nr 674, 675

*Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA*

**674.** Nieważki poziomy pręt o długości $2a$ może obracać się swobodnie wokół pionowej osi przechodzącej przez jego środek (rys. 1). Na pręt nawleczone są dwie jednakowe kulki, które mogą przemieszczać się wzdłuż pręta bez tarcia i odbijać się sprężyście od odbojników na jego końcach. Na początku kulki umocowane są w odległościach $a/2$ od osi obrotu. Pręt rozkręcono do prędkości kątowej $\omega_0$, po czym kulki jednocześnie oswobodzono. Po jakich torach będą poruszać się kulki? Po jakim czasie pręt wykona pełny obrót? Jaka jest zależność prędkości kątowej pręta od czasu? Rozmiary kulek są dużo mniejsze od długości pręta.

**675.** Trzy jednakowe naładowane kulki połączone są nieprzewodzącymi nićmi, które tworzą trójkąt prostokątny $ABC$ (rys. 2). Kąt $ABC$ jest równy $\alpha$, bok $BC$ ma długość $l$. Z jakimi przyspieszeniami zaczną poruszać się kulki po przecięciu nici $BC$? Masa kulki jest równa $m$, ładunek każdej z nich wynosi $q$. Sił ciężkości nie uwzględniamy.

## Rozwiązania zadań z numeru 11/2018

Przypominamy treść zadań:

**666.** Między okładkami kondensatora płaskiego porusza się ze stałą prędkością $v$ cienka płytka naładowana równomiernie ładunkiem $q$. Znaleźć natężenie prądu w obwodzie przedstawionym na rysunku. Odległość między okładkami wynosi $d$, efekty brzegowe można zaniedbać.

**667.** W ustawionym pionowo zamkniętym z dwóch stron cylindrze znajduje się mieszanina dwóch gazów doskonałych o masach molowych $\mu_1$, $\mu_2$ i masach odpowiednio $m_1$, $m_2$. Wewnątrz cylindra znajduje się tłok o masie $M$, który jest przepuszczalny tylko dla gazu pierwszego. Początkowo tłok znajduje się przy górnej podstawie cylindra, a następnie zostaje puszczony swobodnie. Ile moli gazu pierwszego znajdować się będzie po ustaleniu się równowagi powyżej tłoka? Temperatura układu jest stała i wynosi $T$. Tarcie tłoka o ścianki można zaniedbać. Wysokość cylindra (nie uwzględniając grubości tłoka) jest równa $l$.

**666.** Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że ładunek płytki jest dodatni. Rozważmy sytuację, gdy płytka naładowana ładunkiem $q > 0$ jest nieruchoma i znajduje się w odległości $x$ od jednej z okładek (rys. 4). Okładki kondensatora są zwarte drutem i uziemione, zatem napięcie między nimi wynosi zero. Wartości natężeń pola elektrycznego w obszarach zaznaczonych na rysunku wynoszą:

$$E_1 = (q - Q_2 + Q_1)/(2\varepsilon_0 S), \quad E_2 = (q + Q_2 - Q_1)/(2\varepsilon_0 S),$$

gdzie $Q_1 < 0$ i $Q_2 < 0$ to ładunki na okładkach kondensatora, $S$ jest powierzchnią płytki. Spełniony jest związek $E_1 x = E_2(d - x)$. Ponieważ potencjał okładek kondensatora wynosi zero, na zewnątrz kondensatora nie ma pola elektrycznego, stąd $q + Q_1 + Q_2 = 0$. Eliminując z powyższych równań $E_1$, $E_2$ i $Q_2$, otrzymujemy związek $qx = -Q_1 d$. Przesunięcie płytki o $\Delta x$ powoduje zmianę ładunku $Q_1$ o $|\Delta Q| = q\Delta x/d$, czyli przepływ prądu między okładkami kondensatora o natężeniu

$$I = |\Delta Q|/\Delta t = qv/d.$$

**667.** W stanie równowagi tyle samo cząsteczek gazu pierwszego przenika przez tłok w obie strony. Ponieważ temperatura $T$ w obu częściach cylindra jest taka sama, liczba moli gazu pierwszego w jednostce objętości po obu stronach tłoka musi być jednakowa, zatem jednakowe jest też ciśnienie $p_1$ gazu pierwszego po obu stronach tłoka. Niech $p_2$ oznacza ciśnienie gazu nieprzenikającego przez tłok w dolnej części cylindra (rys. 5). Warunek równowagi tłoka ma postać $Mg = p_2 S$, gdzie $S$ jest polem powierzchni tłoka. Korzystając z równania Clapeyrona dla gazu drugiego, otrzymujemy wyrażenie na odległość $x$ tłoka od dolnej podstawy cylindra: $x = m_2 RT/(\mu_2 Mg)$. Oznaczmy liczbę moli gazu pierwszego w górnej części cylindra przez $n_1$, a w dolnej przez $n_2$. Zachodzi związek $n_1 + n_2 = m_1/\mu_1$. Spełnione są też równania Clapeyrona: $p_1(l - x)S = n_1 RT$ oraz $p_1 x S = n_2 RT$. Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy szukaną liczbę moli gazu w górnej części naczynia:

$$n_1 = \frac{m_1}{\mu_1 l}\left(l - \frac{m_2 RT}{\mu_2 Mg}\right).$$

## Zadania z matematyki nr 777, 778

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2019

**777.** W trójkącie $ABC$ bok $BC$ jest najdłuższy. Okrąg wpisany jest styczny do boków $BC$, $CA$, $AB$ odpowiednio w punktach $K$, $L$, $M$. Na prostej $KM$ leży taki punkt $P$, że odcinki $PC$ oraz $KL$ są równoległe. Dowieść, że prosta $AP$ przechodzi przez środek odcinka $KL$.

**778.** Znaleźć wszystkie trójki liczb całkowitych $x, y, z$ spełniające równanie

$$(x+y+z)^2 = 2(x^2+y^2+z^2)$$

wraz z warunkiem $\mathrm{NWD}(x, y, z) = 1$.

Zadanie 778 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

## Rozwiązania zadań z numeru 11/2018

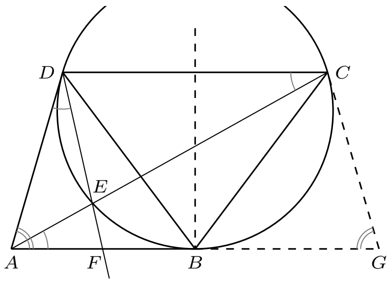
Przypominamy treść zadań:

**769.** W trapezie $ABCD$ o równoległych podstawach $AB$ i $CD$ zachodzą równości: $|AB| = |AD|$, $|BD| = |BC|$. Okrąg opisany na trójkącie $BCD$ przecina przekątną $AC$ w punkcie $E$. Dowieść, że prosta $DE$ połowi bok $AB$.

**770.** Dla dodatnich liczb całkowitych $a_1, \ldots, a_m$ oraz $n$ rozważamy sumę

$$K_n(a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{n}\right)^{a_i}.$$

Dla ustalonych liczb całkowitych $m, n \geqslant 2$ wyznaczyć kres górny zbioru tych wartości wyrażenia $K_n(a_1, \ldots, a_m)$, które są mniejsze od 1.




**769.** Trójkąt $BCD$ jest równoramienny; symetralna boku $CD$ jest osią symetrii tego trójkąta, więc i okręgu na nim opisanego; prosta $AB$ (równoległa do $CD$) jest styczna do tego okręgu. Skoro $|AB| = |AD|$, zatem prosta $AD$ też jest styczna. Wynikają stąd równości kątów

$$|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle CAB|.$$

Prosta $DE$ przecina $AB$ w punkcie, który nazwiemy $F$. Niech $G$ będzie punktem symetrycznym do $A$ względem $B$. Widzimy trapez równoramienny $AGCD$, z równymi kątami: $|\sphericalangle DAF| = |\sphericalangle AGC|$. Stąd i z wcześniejszej równości (przepisanej jako $|\sphericalangle ADF| = |\sphericalangle GAC|$) wynika podobieństwo trójkątów $DAF$ i $AGC$. W konsekwencji

$$\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{|DA|}{|AF|} = \frac{|AG|}{|GC|} = \frac{|AG|}{|GB|} = 2,$$

co pokazuje, że $F$ jest środkiem odcinka $AB$.

**770.** Nie tracimy ogólności, rozważając jedynie niemalejące ciągi $(a_1, \ldots, a_m)$, dzięki czemu wyrazy sumy

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{n}\right)^{a_1} + \left(\frac{1}{n}\right)^{a_2} + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^{a_m}$$

są uporządkowane nierosnąco. Niech $q$ oraz $r$ oznaczają iloraz i resztę z dzielenia $m$ przez $n-1$. Wykażemy, że ciąg

$$(2) \qquad (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n-1}, \ldots, \underbrace{q, \ldots, q}_{n-1}, \underbrace{q{+}1, \ldots, q{+}1}_{r}) =: \\ =: (b_1, \ldots, b_m)$$

jest tym, dla którego suma (1) – pozostając mniejszą od 1 – jest maksymalna. Wynosi ona

$$(3) \qquad 1 - \frac{1}{n^q} + \frac{r}{n^{q+1}}.$$

Niech więc $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_m$ będzie dowolnym ciągiem, dla którego wartość sumy (1) jest mniejsza od 1. Przypuśćmy, że pewien wyraz $(1/n)^k$, z wykładnikiem $k \geqslant 2$, powtarza się co najmniej $n$ razy. Przyjmijmy, że $k$ jest największym takim numerem. Wykreślamy $n$ składników równych $(1/n)^k$ i zastępujemy je pojedynczym wyrazem $(1/n)^{k-1}$. Wartość sumy nie uległa zmianie, ale ciąg skrócił się o $n-1$ wyrazów. Dopisujemy więc na końcu $n-1$ ułamków, z wykładnikami tak dużymi, by wartość sumy (1) (która się powiększa!) pozostała mniejsza od 1 – bacząc jedynie, by żaden wyraz (z wykładnikiem $> k$) nie powtórzył się $n$-krotnie.

Powtarzamy tę modyfikację tak długo, dopóki istnieje blok jednakowych składników $(1/n)^j$, długości co najmniej $n$, z jakimkolwiek wykładnikiem $j \geqslant 2$. Mógłby ewentualnie pozostać taki blok dla wykładnika $j = 1$, czyli złożony ze składników równych $1/n$ – ale to też nie jest możliwe, skoro przez cały czas była prowadzona kontrola, by suma nie osiągnęła wartości 1. Stąd wynika, że w dalszym ciągu dowodu można ograniczać uwagę do ciągów $(a_1, \ldots, a_m)$ o własnościach:

(4) $\quad a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_m$; żadna liczba nie powtarza się $n$-krotnie.

Ciąg (2) spełnia te warunki. Dla wykazania jego optymalności weźmy pod uwagę dowolny inny ciąg $(a_1, \ldots, a_m)$, także spełniający powyższe warunki, i oznaczmy przez $\ell$ najwcześniejszy numer, dla którego $a_\ell \neq b_\ell$. Zatem odcinki $(a_1, \ldots, a_{\ell-1})$, $(b_1, \ldots, b_{\ell-1})$ są identyczne.

Nietrudno zauważyć, że $a_\ell > b_\ell$; w przeciwnym przypadku mielibyśmy $b_\ell > a_\ell \geqslant a_{\ell-1} = b_{\ell-1}$; to by oznaczało, że $b_{\ell-1} = b_\ell - 1$, $a_\ell = a_{\ell-1}$ i że w ciągu (2) $b_{\ell-1}$ jest wyrazem kończącym blok złożony z $n-1$ równych liczb. Skoro zaś $a_i = b_i$ dla $i < \ell$ oraz $a_\ell = a_{\ell-1}$, mielibyśmy w ciągu $(a_i)$ blok złożony z $n$ równych liczb, wbrew warunkowi (4). Tak więc $a_{\ell-1} = b_{\ell-1} \leqslant b_\ell < a_\ell \leqslant a_{\ell+1}$.

Dokonujemy kolejnej modyfikacji ciągu $(a_1, \ldots, a_m)$, zastępując wyraz $a_\ell$ liczbą $b_\ell$. Warunki (4) pozostają spełnione, wartość sumy (1) zwiększa się, zaś nowy ciąg pokrywa się z ciągiem (2) na odcinku $(b_1, \ldots, b_\ell)$. Po skończenie wielu takich krokach dochodzimy do ciągu $(b_1, \ldots, b_m)$. To pokazuje, że wartość sumy (1) dla wyjściowego ciągu $(a_1, \ldots, a_m)$ była mniejsza niż jej wartość dla ciągu $(b_1, \ldots, b_m)$ – czyli liczba dana wzorem (3), która wobec tego jest szukanym kresem górnym.