Symetria w algebrze

Bartłomiej BZDĘGA

Niech $A = \{a, b, c, d, e\}$. Rozważmy funkcję $\sigma : A \to A$, określoną następująco:

$$\sigma(a) = d, \quad \sigma(b) = c, \quad \sigma(c) = e, \quad \sigma(d) = a, \quad \sigma(e) = b.$$

Zwróćmy uwagę, że wśród wartości funkcji σ każdy element zbioru A występuje dokładnie raz. Odwzorowania o tej własności będziemy nazywać *permutacjami zmiennych.* Działają one w naturalny sposób na wyrażeniach algebraicznych, na przykład opisana wyżej σ robi to tak:

$$a^2b + b^2c + c^2d + d^2e + e^2a \quad \longmapsto \quad d^2c + c^2e + e^2a + a^2b + b^2d.$$

Wyrażenia algebraiczne otrzymane z danego poprzez permutacje zmiennych będziemy nazywać jego *symetrycznymi wersjami.* Jeśli wszystkie symetryczne wersje są równe, to wyrażenie nazywamy *symetrycznym.* Dla jasności, wyrażenie $ab + bc + ca$ jest symetryczne, a wyrażenie $ab + bc + cd + da$ nie jest. Pojęcie symetryczności można intuicyjnie rozszerzyć: równanie jest symetryczne, jeśli każda jego symetryczna wersja jest mu równoważna, podobnie nierówność, układ równań itp.

Przez zapis $\tau = (x, y)$ rozumiemy, że $\tau(x) = y$, $\tau(y) = x$ oraz τ jest identycznością na wszystkich pozostałych zmiennych. Taką permutację nazywamy *transpozycją.* Aby sprawdzić symetryczność, można ograniczyć się do transpozycji jednej zmiennej ze wszystkimi pozostałymi, czyli przykładowo dla wyrażenia $ab + bc + cd + da$ byłyby to (a, b), (a, c) i (a, d).

Jeśli z symetrycznego równania lub układu równań wywnioskujemy jakąkolwiek własność jego niewiadomych, to spełnione są także własności do niej symetryczne, które można udowodnić w pełni analogicznie. Takie rozumowanie stosujemy w zadaniach 1, 3, 5 i 9.

Wraz z każdym rozwiązaniem symetryczne równanie lub układ ma rozwiązania powstałe przez jego permutacje. Pojawia się to w zadaniach 2, 3 i 7.

Wobec powyższego w zadaniach z algebraiczną symetrią możemy na początku rozwiązania narzucić pewien porządek wśród niewiadomych, gdyż rozwiązania nieuporządkowane dostaniemy poprzez permutacje uporządkowanych. Zabieg ten można prześledzić w zadaniach 4, 6, 7, 8 i 10.

Zadania

Rozwiązać poniższe układy równań w liczbach rzeczywistych.

1. $\begin{cases} y^2 + z^2 = 3x - 1 \\ z^2 + x^2 = 3y - 1 \\ x^2 + y^2 = 3z - 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^3 = |y - z| \\ y^3 = |z - x| \\ z^3 = |x - y| \end{cases}$

4. $\begin{cases} y^4 + z^4 = x^7 \\ z^4 + x^4 = y^7 \\ x^4 + y^4 = z^7 \end{cases}$

5. Suma kwadratów dowolnych trzech liczb spośród $a, b, c, d, e > 0$ jest równa sumie sześcianów dwóch pozostałych. Wyznaczyć te liczby.

6. Udowodnić, że $x^t(x - y)(x - z) + y^t(y - z)(y - x) + z^t(z - x)(z - y) \geqslant 0$ dla $x, y, z \geqslant 0$ i $t > 0$ (nierówność Schura).

7. Liczby a, b i c są naturalne. Iloczyn dowolnych dwóch spośród nich daje resztę 1 z dzielenia przez trzecią. Wyznaczyć te liczby.

8. Wyznaczyć największą możliwą wartość wyrażenia $\min\{a, b, c\} - \max\{ab, bc, ca\}$ dla liczb rzeczywistych a, b i c.

9. Liczby rzeczywiste x, y i z spełniają warunki: $|x| \leqslant |y - z|$, $|y| \leqslant |z - x|$, $|z| \leqslant |x - y|$. Dowieść, że jedna z nich jest równa sumie pozostałych.

10. Rozwiązać równanie $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc$ w liczbach naturalnych.

Wskazówki do zadań

1. Zauważamy, że $x, y, z > 0$. Odejmując stronami drugie równanie od pierwszego, otrzymamy $(x - z)(x + z + 3) = 0$, co daje $x = z$.

2. Podnosząc pierwsze równanie do sześcianu i odejmując od niego stronami trzecie, otrzymamy po przekształceniach $(x + y)(y + z)(z + x) = 0$.

3. Przyjmując $x \leqslant y \leqslant z$ i odejmując stronami trzecie równanie od drugiego, otrzymamy $(y - z)(y^2 + yz + z^2 + 1) = 0$, więc $y = z$, bo drugi nawias jest dodatni.

4. Zauważmy, że $x^7 = y^4 + z^4 \geqslant 0$, więc $x \geqslant 0$; analogicznie $y \geqslant 0$ i $z \geqslant 0$. Załóżmy, że $x \leqslant y \leqslant z$. Wówczas prawe strony równań są uporządkowane niemalejąco, a lewe nierosnąco, więc muszą być wszystkie równe.

5. Odejmując stronami równości $a^2 + b^2 + c^2 = d^3 + e^3$ oraz $a^2 + b^2 + d^2 = c^3 + e^3$, otrzymamy $c^2(c + 1) = d^2(d + 1)$, z czego można wywnioskować, że $c = d$.

6. Postać równoważna zadanej nierówności: $(z - y)(z^t(z - x) - y^t(y - x)) + x^t(z - x)(y - x) \geqslant 0$.

7. Jest jasne, że $a, b, c > 1$. Można uzasadnić, że $abc \mid bc + ca + ab - 1$. Ograniczamy się do przypadku, w którym $a \leqslant b \leqslant c$. Mamy $bc + ca + ab - 1 < 2abc$, więc musi być $bc + ca + ab = abc$. Dla $a \geqslant 3$ otrzymujemy sprzeczność, więc $a = 2$.

8. Jeśli wśród liczb a, b, c występują liczby ujemne, to $\min\{a, b, c\} - \max\{ab, bc, ca\} < 0$. Rozważmy więc $a, b, c \geqslant 0$. Można przyjąć $a \leqslant b \leqslant c$, wystarczy użyć oszacowania $a^2 \leqslant bc$.

9. Podnosząc obustronnie do kwadratu pierwszą nierówność, otrzymamy $(x + y - z)(x - y + z) \leqslant 0$. Trzeba wziąć pod uwagę jeszcze dwie symetryczne jej wersje i zauważyć, że iloczyn lewych stron wszystkich trzech jest niedodatni, jednocześnie będąc kwadratem liczby rzeczywistej.

10. Podstawmy $a = 2^\alpha x$, $b = 2^\beta y$ i $c = 2^\gamma z$, gdzie x, y i z są liczbami nieparzystymi. Ograniczamy się do przypadku $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Należy podzielić obie strony równania przez $2^{2\alpha}$, a następnie przeanalizować ich reszty z dzielenia przez 4.