Porównywanie wież potęgowych

*Karol GRYSZKA**

* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Zadanie. *Używając dowolnych cyfr oraz operacji $+, -, \cdot, /$, potęgowania i nawiasów, należy zapisać działanie o możliwie największym wyniku. Czas na zapisanie działania to 10 sekund.*

Drogi Czytelniku, z dużym prawdopodobieństwem zapisałeś coś takiego $9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9}}}}}$, czyli *wieżę potęgową*. Działanie $a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ oznaczmy przez $a \uparrow b$, gdzie b oznacza, ile razy liczba a pojawia się w wieży. Możemy rozważyć również wieże, w których kolejne „piętra” nie są taką samą liczbą. Wprowadźmy następującą notację:

$$a_1^{a_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_n}}}}} = [a_1; a_2; \ldots; a_n].$$

Liczba $9 \uparrow 3 = 9^{9^9}$ ma w rozwinięciu 369 693 100 cyfr. Więcej o dużych liczbach i „wykładnikach strzałek” można znaleźć w *Delcie* 3/2008.

Przyjmijmy, że wszystkie liczby w wieży, poza ostatnią, muszą być całkowite i niezerowe. Wartość n nazywamy wysokością wieży. Ponadto zastosujemy następujące uproszczenie: jeżeli liczba a pojawia się w wieży k razy pod rząd, to będziemy to oznaczać przez $a \times k$, na przykład:

$$3^{3^{3^3}} = 3 \uparrow 4 = [3;3;3;3] = [3 \times 4], \qquad 3^{5^{5^{5^5}}} = [3; 5 \times 4].$$

Zwróćmy uwagę, że kolejność wykonywania działań oraz sposób zagnieżdżania notacji w sobie samej ma znaczenie, np.

$$[[3;3];3] = \left(3^3\right)^3 < 3^{3^3} = [3;3;3].$$

W tym artykule zajmiemy się takimi właśnie wieżami. Dokładniej, jak już mógł zdradzić tytuł, będziemy starali się wskazać sposób porównywania wież.

Zaczniemy od znalezienia ogólnego sposobu na zapisanie wyrażenia $[a_1; a_2; \ldots; a_n]$ za pomocą wieży $[10 \times k; y]$, gdzie $k > 0$ jest naturalne, a $y \in [1{,}10)$, czyli

$$[a_1; a_2; \ldots; a_n] = [10 \times k; y].$$

Przy tym staramy się znaleźć takie y, żeby nie zmieniać wartości wieży, albo (co częstsze) zmienić ją możliwie nieznacznie. Wieżę $[10 \times k; y]$ nazwiemy *znormalizowaną*. Sprowadzanie dwóch wież do takiej postaci pozwala sprawnie porównać ich wartości – wystarczy porównać wysokości wież znormalizowanych oraz, jeśli wysokości są identyczne, ostatnią liczbę w wieży. Na kilku przykładach zaprezentujemy normalizację.

Prosty przykład normalizacji wieży:
$$[4 \times 3] \approx [10; 154{,}127] \approx [10; 10; 2{,}188].$$

Wszystkie wartości numeryczne zostały uzyskane z wykorzystaniem pakietu WolframAlpha.

Zamiast $\log_{10} x$ w tekście stosowane jest $\log x$.

Przykład 1. Rozważmy $[9;9]$ i znajdźmy takie x, dla którego zachodzi $9^9 = 10^x$. Oczywiście $x = \log 9^9 = 9 \log 9 \approx 8{,}588$, a więc

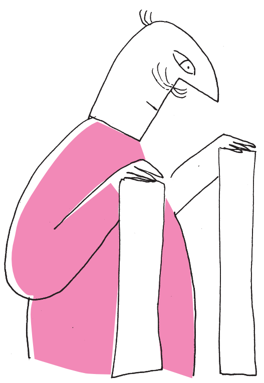
$$[9;9] = [10; 9\log 9] \approx [10; 8{,}588].$$

Przykład 2. Weźmy $[9 \times 3]$ i znajdźmy takie x, że zachodzi $9^{9^9} = 10^x$. W tym przypadku $x = 9^9 \log 9 \geqslant 10$. Kolejnym krokiem jest znalezienie takiego x_1, że $x = 10^{x_1}$. Oczywiście $x_1 = \log x = 9 \log 9 + \log(\log 9) \approx 8{,}568$, czyli ostatecznie

$$[9 \times 3] = [10; 10; x_1] \approx [10; 10; 8{,}568].$$

Przykład 3. Rozważmy wreszcie liczbę $[9 \times 4]$ i postąpmy podobnie jak wcześniej. Mamy kolejno: $[9 \times 4] = 10^x$, $x = [9 \times 3] \log 9$, $x = 10^{x_1}$, $x_1 = \log x = 9^9 \log 9 + \log(\log 9)$, $x_1 = 10^{x_2}$, $x_2 = \log x_1 = \ldots$ I tu napotykamy kłopot, gdyż liczba x_1 jest sumą dwóch liczb, a nie da się rozbić logarytmu sumy. Zamiast tego spójrzmy na składniki x_1 i zauważmy, że zachodzi $|9^9 \log 9| \gg |\log(\log 9)|$. (Obie strony rozważamy w modułach, gdyż liczba $\log\log 9$ jest ujemna.) Istotnie, $9^9 \log 9 \approx 10^{8{,}568}$ oraz $\log(\log 9) \approx -0{,}02$. W takim razie zaniedbajmy ten mały składnik. Wtedy $x_1 \approx 9^9 \log 9$ i ostatecznie $x_2' = 9 \log 9 + \log\log 9$ oraz

$$[9 \times 4] \approx [10 \times 3; x_2'] \approx [10 \times 3; 8{,}568].$$



Różnica między najwyższymi piętrami, to jest między x_2 i x_2', wynosi $|\log(9^9 \log 9 + \log(\log 9)) - (9 \log 9 + \log(\log 9))\,| < 10^{-10}$, jest więc relatywnie mała.

Spójrzmy teraz na problem szacowania z nieco innej strony. Najpierw parę narzędzi. Zapiszmy $\log(x+y) = \log\left(x \cdot (1 + \frac{y}{x})\right) = \log x + \log\left(1 + \frac{y}{x}\right)$ i podstawmy $z = y/x$. Następnie rozwińmy drugi składnik w szereg Taylora w punkcie $z_0 = 0$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n \ln 10}.$$

Szereg Taylora pozwala na przedstawienie wartości funkcji f w pewnym punkcie x za pomocą wyrażenia podobnego do wielomianowego. Ustala się pewien punkt bazowy x_0, i wtedy dla wszystkich x takich, że $|x - x_0| < R$ dla stosownie dobranego R można zapisać:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

gdzie $f^{(n)}$ oznacza n-tą pochodną funkcji f. U nas rozwinięcie w szereg Taylora funkcji $\log(1 + z)$ jest możliwe tylko dla takich z, dla których $|z| < 1$.

Podstawiając wartości z Przykładu 3., otrzymujemy $z = \frac{\log\log 9}{9^9 \log 9} \approx -5{,}5 \cdot 10^{-11}$.

Sprawdźmy, jak wygląda analogiczne przybliżenie dla liczby $[9 \times 5]$. W tym przypadku pierwsze przybliżenie stosowane jest do liczb $x = [9 \times 3] \log 9$ oraz $y = \log\log 2$, a więc $z = \frac{y}{x} \approx -[10; -10; 8{,}568]$. Ta liczba jest mała, więc możemy dokonać następującego przybliżenia (tylko pierwszy wyraz szeregu Taylora): $\log(1 + z) \approx \frac{z}{\ln 10}$, i stwierdzić, że te wartości nie różnią się prawie wcale.

Powyższe przykłady dostarczają nam takiej oto strategii w normalizowaniu wież:

1. Aby wyznaczyć następny wykładnik, należy zlogarytmować ten otrzymany w poprzednim kroku (logarytmowanie dziesiętne).
2. Rozsądne jest stosowanie wspomnianych przybliżeń (szczególnie dla wież o wysokości co najmniej 4) – popełniany w ten sposób błąd jest znikomy dla szacowania ostatniego wykładnika.
3. Powtarzane przybliżenia zawsze prowadzą do opuszczania takiego samego składnika: $\log\log 9$, który dla liczb postaci $[9 \times n]$ jest tym mniejszy od reszty, im większe jest n.

Korzystając z powyższej strategii, możemy przekonać się, że dla $n > 2$ zachodzi następująca zależność:

$$[9 \times n] \approx [10 \times (n - 1); 8{,}568]. \tag{4}$$

Czy ostatnia liczba w wieży znormalizowanej jest stała, tj. nie zależy od wysokości wieży? Oczywiście dokładne obliczenia pokazują, że tak nie jest, a otrzymane podobieństwo wynika jedynie ze stosowanych przybliżeń. Czy to więc przypadek, czy reguła? Kwestię tę rozwiązuje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Mając dane wieże* $[9 \times n]$ *i ich postacie znormalizowane* $[10 \times (n - 1); x_n]$, *rozważmy ciąg liczbowy* (x_n). *Granica* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ *istnieje.*

Każda wskazówka jest dobra, w tym jednak przypadku pokazanie, że ciąg x_n jest malejący, nie jest natychmiastowe – wymaga dużo ostrożności w obliczeniach i szacowaniach.

Dowód twierdzenia pomijamy, udzielając jednak wskazówki dla Czytelnika Ambitnego – wystarczy wykazać, że ciąg (x_n) jest malejący. Powróćmy do porównywania wież i skomplikujmy nieco zadanie, dopuszczając działanie silni.

Rozważmy wartości $[9 \times 22]!$, $[9 \times 21; 9]$ oraz $[9! \times 14]!$. Wiemy już, że

$[9 \times 22] \approx [10 \times 21; 8{,}568]$, i możemy się przekonać, że $[9! \times 14] \approx [10 \times 14; 6{,}305]$.

Łatwo teraz porównać te liczby oraz ich silnie. Widać, że strategia zwiększania liczb potęgowanych kosztem obniżania wysokości wieży nie opłaca się. Zauważmy ponadto, że nierówność $[9! \times 21] < [9 \times 22]$ wydaje się na pierwszy rzut oka nieprawdopodobna!

Przykład dla $n = 3$:

$$a^{a^{a^{a^a}}} < \left(a^{a^a}\right)^{a^{a^a}} = a^{a^{a}\cdot a^{a^a}} < a^{a^{a^{a^{a^a}}}}.$$

Wzór Stirlinga pozwala przybliżać silnię dużych liczb za pomocą wyrażenia potęgowego

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Pozostaje nam jeszcze porównać liczbę $[9 \times 21; 9!] \approx [10 \times 22; 5{,}539]$ z pozostałymi. W tym celu oszacujemy liczbę $[9! \times 14]!$. Można sprawdzić, że $[a \times (2n - 1)] < < [a \times n]^{[a \times n]} < [a \times 2n]$. Stosując wzór Stirlinga, otrzymujemy

$$[9! \times 14]! \approx [10 \times 14; 6{,}305]! > [10 \times 14]! > [10 \times 27].$$

Składniki $e^{[10\times 14]}$ oraz $\sqrt{2\pi[10 \times 14]}$ pomijamy, gdyż nie mają one żadnego wpływu na wysokość postaci znormalizowanej.

Jaki jest więc werdykt końcowy? Oto on:

$$[9 \times 21; 9!] < [9! \times 14]! < [9 \times 22]!,$$

przy czym liczba z lewej jest znikoma w porównaniu ze środkową, a liczba środkowa jest znikoma w porównaniu z prawą.

Przedstawimy teraz inną metodę porównywania wież. Nasze rozumowanie przeprowadzimy w sytuacji, gdy bazą nie jest liczba 10, lecz pewna ustalona liczba naturalna $N > 2$. Załóżmy mianowicie, że dane są dwie liczby A i B:

$$A = [N \times n; y], \qquad B = [b_1; \ldots; b_n; x],$$

gdzie $x,y > 1$ (zauważmy, że wieże mają taką samą wysokość). Odpowiemy teraz na następujące pytanie: *co musimy wiedzieć o x i y, żeby stwierdzić, że $A < B$ niezależnie od wyboru liczb $b_i \in \{2, \ldots, N\}$?* Tak sformułowane pytanie w istocie upraszcza problem; przyjmijmy najgorszy scenariusz, tj. $b_i = 2$ dla wszystkich i.

Twierdzenie 2. *Niech $K = \log_2 N$. Jeśli $x > 2Ky$, to $A < B$.*

Skoro $N > 2$, to
$$y > 1 > \log_N(2\log_2 N)$$
oraz
$$N^{2y} > N^{y+\log_N(2\log_2 N)} = 2\log_2 N \cdot N^y.$$

Dowód. Niech $n = 1$. Wtedy łatwo sprawdzić, że $2^x > N^{2y} > N^y$. Rozważmy teraz $n > 1$. Zauważmy, że

$$2^x > 2^{2Ky} = N^{2y} > 2\log_2 N \cdot N^y = 2KN^y.$$

Niech teraz $y' = N^y$ oraz $x' = 2^x > 2KN^y = 2Ky'$. Wtedy

$$[N; N; y] = [N; y'] < [2; x'] = [2; 2; x].$$

Kończy to dowód indukcyjny. □

Przyjrzyjmy się teraz następującemu przykładowi. Wiemy już, że $[9 \times 22] \approx [10 \times 21; 8{,}568]$. Zgodnie z Twierdzeniem 2. dla $N = 9$ oraz $y = 9$ dowolne $x > 57{,}1 > 2\log_2 9 \cdot 9$ gwarantuje to, że niezależnie od doboru $b_1, \ldots, b_{21}$ wyrażenie $[b_1; \ldots; b_{21}; x]$ będzie większe od $[9 \times 22]$. Tym samym

$$[9 \times 22] < [2 \times 21; 58].$$

Jest to kolejna nieprawdopodobna nierówność! Stosując Twierdzenie 2. dla $N = y = 9!$, możemy się ponadto przekonać, że

$$2\log_2 9! \cdot 9! = 13\ 404\ 157{,}980\ldots$$

$$[9! \times 21] < [9 \times 20; 13\ 404\ 158] < [9 \times 20; 9^9] = [9 \times 22],$$

a więc raz jeszcze otrzymujemy nierówność wcześniej uzyskaną inną metodą. Twierdzenie 2. niesie za sobą jeszcze więcej. Dla *dowolnego* $n > 0$ zachodzą następujące nierówności:

Druga nierówność to konsekwencja relacji
$$13\ 404\ 158 < [2 \times 5].$$

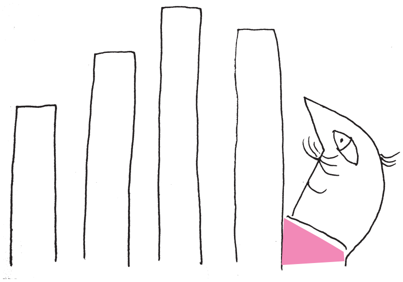
- $[9! \times n] < [9 \times (n+1)]$,
- $[9! \times n] < [2 \times (n-1); [2 \times 5]] = [2 \times (n+4)]$.

Na zakończenie kilka potencjalnych problemów dla Czytelników Dociekliwych i Cierpliwych*.

*takimi z pewnością są uczniowie startujący w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego (do udziału w którym serdecznie zachęcamy).

1. Czy Twierdzenie 1. można uogólnić na przypadek, gdy w wieży wyrazy pojawiają się okresowo?
2. Czy Twierdzenie 2. daje się poprawić tak, aby było stosowalne dla wież o *różnych* wysokościach?

Wieżami okresowymi są wyrażenia
$$[3; 2; 3; 2], [4; 2; 3; 4; 2; 3; 4; 2; 3].$$



Zobaczyć niewidoczne

*Jakub NALEPA**

*Instytut Informatyki Politechniki Śląskiej w Gliwicach

Każdy z nas może z łatwością wymienić zawody, których wykonywanie naraża ludzi na ciągły stres. Często stres jest związany z tym, że decyzje podejmowane w codziennej pracy wpływają na zdrowie (i życie) innych. Strażak, ratownik medyczny, chirurg, pilot, radiolog... Wszyscy muszą działać szybko, a koszt potencjalnych pomyłek może być dramatycznie wysoki. Warto zauważyć, że proces podejmowania decyzji w praktyce polega na analizie różnych danych (w czasie rzeczywistym), np. w przypadku danych medycznych mogą to być różne rodzaje (*modalności*) obrazów, zawierające różne informacje o pacjencie. Zobaczmy, jak sztuczna inteligencja może ułatwić proces podejmowania takich decyzji.