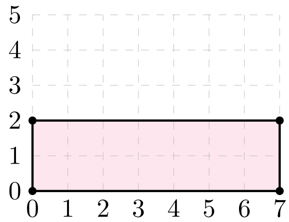
Informatyczny kącik olimpijski (124): *Wyspa i liczydło*

Tym razem omówimy dwa zadania: *Wyspę* z IX OIG oraz *Liczydło* z XII OIG.

Wyspa: *Dany jest prostokąt o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, którego lewy-dolny róg ma współrzędne* $(0,0)$*, zaś prawy-górny róg ma współrzędne* (N,M)*. Dla podanego* $P \in \mathbb{N}$ *(*$P \leqslant \frac{NM}{2}$*) chcemy znaleźć taki czworokąt wypukły o polu* P*, którego wierzchołki mają współrzędne całkowite oraz należą do prostokąta.*

Przypadek: $N \mid P$

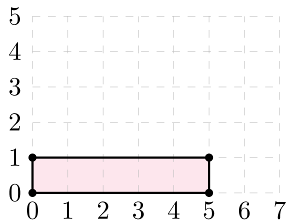
Rozważmy najpierw przypadek, kiedy $N \mid P$. Wtedy możemy zbudować prostokąt, którego wierzchołkami są: $(0,0), (N,0), (N, \frac{P}{N})$ i $(0, \frac{P}{N})$. Przykład dla: $N=7$, $M=5$, $P=14$.



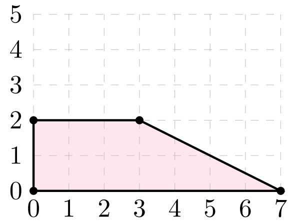
Przypadek: $N \nmid P$

Ten przypadek przeanalizujemy w trzech krokach:

1. Jeśli $P < N$, wtedy możemy zbudować prostokąt, którego wierzchołkami są: $(0,0), (P,0), (P,1)$ i $(0,1)$. Przykład dla: $N=7$, $M=5$, $P=5$.

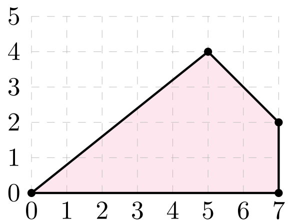


2. Jeśli $N < P < 2N$, wtedy możemy zbudować trapez, którego wierzchołkami są: $(0,0), (N,0), (P-N,2)$ i $(0,2)$. Przykład dla: $N=7$, $M=5$, $P=10$.



3. Został nam do rozpatrzenia przypadek, kiedy $2N < P$. Niech:
   - $P_c = N\lfloor \frac{P}{N} \rfloor$ (największa wielokrotność N nie większa niż P),
   - $H = 2\frac{P_c}{N}$ (wysokość trójkąta o podstawie N, który ma pole P_c),
   - $R = P - P_c$.

   Wówczas możemy zbudować czworokąt, którego wierzchołkami są: $(0,0)$, $(N,0)$, $(N,2)$ i $(N-R,H)$. Przykład dla: $N=7$, $M=5$, $P=16$. Wtedy $P_c=14$, $H=4$ oraz $R=2$.



Powyższe rozważania pokrywają wszystkie przypadki. Dla każdego z nich udało nam się wskazać czworokąt wypukły o polu P.

Liczydło: *Dane są dwie liczby całkowite* L *i* P*. W każdym kroku możemy wykonać jedną z dwóch operacji: 1) dodać dowolnie wybraną liczbę całkowitą do* L *oraz do* P *(jednocześnie); 2) przemnożyć* L *lub* P *przez dowolnie wybraną niezerową liczbę całkowitą. Ile minimalnie operacji należy wykonać, aby obie liczby stały się równe zero?*

Zauważmy najpierw, że tylko dla $L=0$ i $P=0$ odpowiedzią jest 0. Podobnie, tylko dla $L=P$, gdzie $L \neq 0$, odpowiedzią jest 1 – wystarczy do obu liczb dodać $-L$.

W pozostałych przypadkach odpowiedź będzie większa od 1. Zauważmy, że operacja typu 2) nie pozwala wyzerować niezerowej liczby, więc ostatnia operacja będzie typu 1) i zostanie zastosowana do dwóch równych liczb. Jak zatem wyrównać dwie liczby w minimalnej liczbie ruchów?

Rozważmy przypadek, kiedy jedna z liczb jest wielokrotnością drugiej (bez straty ogólności załóżmy, że L jest wielokrotnością P):

- jeśli $L \neq 0$, wtedy P mnożymy przez $\frac{L}{P}$. Całkowita liczba operacji wynosi 2,
- jeśli $L = 0$, wtedy do obu liczb dodajemy P i tę o mniejszej wartości bezwzględnej mnożymy przez 2. Całkowita liczba operacji wynosi 3.

Pozostał nam ostatni przypadek, kiedy L nie jest wielokrotnością P oraz P nie jest wielokrotnością L. Wtedy mnożymy L przez P oraz P przez L i otrzymujemy dwie równe liczby. Wówczas odpowiedzią jest 3.

Prosty dowód, że w każdym z powyższych przypadków korzystamy z minimalnej liczby operacji, pozostawiamy Czytelnikowi.

Bartosz ŁUKASIEWICZ