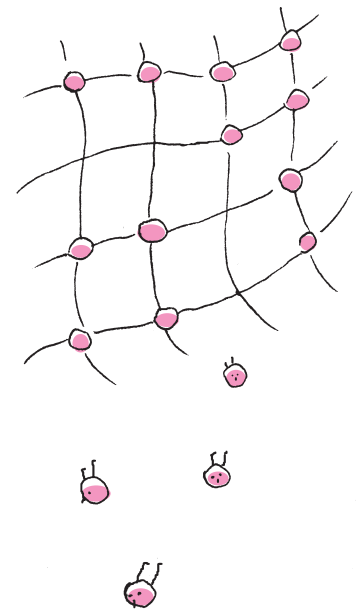

Mamy również

(2) $$\left|\left(1-\frac{1}{3}+\ldots\right)-\left(1-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^s\frac{1}{2s+1}\right)\right|<\frac{1}{2s+3}<\frac{1}{r}.$$

Zauważmy jeszcze, że $\left\lfloor\frac{r^2}{2j+1}\right\rfloor\leqslant\frac{r^2}{2j+1}<\left\lfloor\frac{r^2}{2j+1}\right\rfloor+1$, zatem

$$0\leqslant\frac{1}{2j+1}-\frac{1}{r^2}\left\lfloor\frac{r^2}{2j+1}\right\rfloor<\frac{1}{r^2}.$$

Liczb nieparzystych od 1 do $2s+1$ jest $s+1<r$, więc

(3) $$\left|\left(1-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^s\frac{1}{2s+1}\right)-\frac{1}{r^2}\left(\left\lfloor\frac{r^2}{1}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{r^2}{3}\right\rfloor+\ldots+(-1)^s\left\lfloor\frac{r^2}{2s+1}\right\rfloor\right)\right|<$$
$$<r\cdot\frac{1}{r^2}=\frac{1}{r}.$$

Z nierówności (2), (3) i (1) oraz z nierówności trójkąta ($|a+b|\leqslant|a|+|b|$) wynika, że

$$\left|\left(1-\frac{1}{3}+\ldots\right)-\frac{1}{r^2}\left(\left\lfloor\frac{r^2}{1}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{r^2}{3}\right\rfloor+\ldots\right)\right|<\frac{3}{r},$$

a stąd wynika, że

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^2}\left(\left\lfloor\frac{r^2}{1}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{r^2}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{r^2}{5}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{r^2}{7}\right\rfloor+\ldots\right)=$$
$$=\lim_{r\to\infty}\frac{N(r)}{4r^2}=\frac{\pi}{4}.$$

Różni ludzie, w tym bardzo wybitni, zajmowali się różnicą $N(r)-\pi r^2$ i uzyskiwali coraz dokładniejsze wyniki. Przytoczę niektóre z nich. Carl Friedrich Gauss (1798): $|N(r)-\pi r^2|\leqslant 2\sqrt{2}\pi r$; Wacław Sierpiński (1906) $|N(r)-\pi r^2|\leqslant r^{2/3}$ zmniejszając wykładnik przy r z 1 do 2/3. Najlepszy wynik w tej dziedzinie, wedle tego co wiem, osiągnął w 2017 roku Jean Bourgain, laureat medalu Fieldsa z 1994 roku: $\frac{517}{824}\approx 0{,}627$. Godfrey Hardy (1915) wykazał, że nie istnieje taka stała $c>0$, że $|N(r)-\pi r^2|\leqslant cr^{1/2}$, podobny wynik niezależnie uzyskał Edmund Landau. Hipoteza: dla każdej liczby $d>\frac{1}{2}$ istnieje taka stała $c>0$, że $|N(r)-\pi r^2|\leqslant cr^d$. Do zbadania został już tylko przedział długości $\frac{517}{824}-\frac{1}{2}=\frac{105}{824}\approx 0{,}127$.

Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1588. Funkcja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełnia dla każdego $x\in\mathbb{R}$ równość

$$f(x+1)-f(x)=2x+1$$

oraz $|f(x)|\leqslant 1$ dla $x\in[0,1]$. Wykazać, że $|f(x)|\leqslant x^2+2$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.
Rozwiązanie na str. 16

M 1589. Grupa ośmiu osób ma tę własność, że pośród dowolnych pięciu spośród nich można wskazać trzy osoby, które znają się wzajemnie. Wykazać, że w tej grupie są cztery osoby, które znają się wzajemnie.
Rozwiązanie na str. 16

M 1590. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz zbiór $S=\{1,2,3\ldots,3n\}$. Wyznaczyć największą możliwą liczbę elementów podzbioru $T\subseteq S$ o następującej własności: Dla każdej trójki (niekoniecznie różnych) elementów T ich suma nie należy do T.
Rozwiązanie na str. 16

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 967. Mamy do dyspozycji n identycznych baterii o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}_0$ i oporze wewnętrznym r_w każda. Chcemy uzyskać jak największą moc wydzieloną na oporniku podłączonym do źródła zbudowanego z tych baterii. Jaką moc możemy uzyskać, łącząc baterie (a) szeregowo i (b) równolegle? Ile powinien wynosić opór R dołączanego opornika w każdym z przypadków, by wydzielona moc była maksymalna?
Rozwiązanie na str. 15

F 968. Cząstka o ładunku q i masie m wpada w obszar jednorodnego pola magnetycznego. Prędkość cząstki tworzy różny od zera kąt z wektorem indukcji $\vec{B}$ pola. Ile wynosi częstotliwość f, z jaką cząstka obiega kierunek pola $\vec{B}$?
Rozwiązanie na str. 15