# O deltoidach

*Joanna JASZUŃSKA*

**1.** Deltoid wypukły ma boki długości 25 i 39, a jego krótsza przekątna ma długość 30. Wyznacz długość dłuższej przekątnej tego deltoidu.

**2.** Czy istnieją nieprzystające czworokąty wypukłe $ABCD$, $PQRS$ o równych polach i takie, że $AB = PQ, BC = QR, CD = RS, DA = SP$?

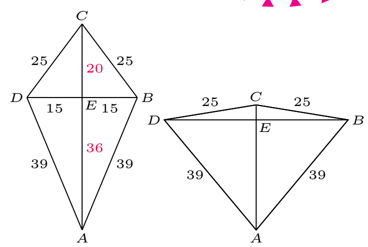
**3.** Wykaż, że dowolny czworokąt wypukły można rozciąć na siedem deltoidów.

**4.** Wykaż, że powierzchnię dowolnego czworościanu można rozciąć na sześć części, z których każda po rozłożeniu na płasko jest deltoidem.

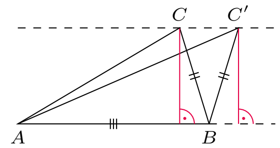
**5.** Czy istnieje taki czworokąt wypukły, który nie jest rombem i którego każda przekątna dzieli go na dwa trójkąty równoramienne?

**6.** Stół do bilarda ma kształt deltoidu $ABCD$ o osi symetrii $AC$ i kątach prostych przy $B$ i $D$. Bila wybita z wierzchołka $A$ po odbiciu od boku $BC$, a następnie od $AD$ trafia w wierzchołek $C$. Wykaż, że środek drogi bili leży na $AC$.

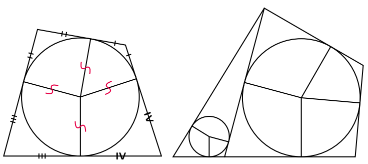
**7.** Dany jest deltoid $ABCD$ o osi symetrii $BD$. Punkty $K, M, N$ są odpowiednio punktami styczności okręgu wpisanego z bokami $AB, BC, DA$; proste $BD$ i $MN$ przecinają się w punkcie $P$. Wykaż, że punkty $A, K, P, N$ leżą na jednym okręgu.



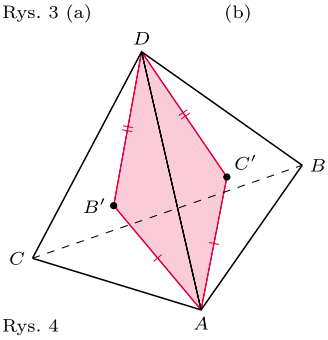

Rys. 1 (a) $BD = 30$ (b) $AC = 30$



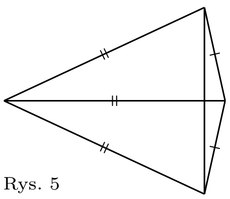

Rys. 2. Trójkąt $ABC$ jest ostrokątny, $AB \neq BC = BC'$, $CC' \parallel AB$



Rys. 3 (a) (b)




Rys. 4



Rys. 5

## Rozwiązania i wskazówki

**R1.** Przy oznaczeniach jak na rysunku 1 (a), korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy $AE = 36$ oraz $CE = 20$, więc $AC = 56$.

Nie jest to jednak jedyne rozwiązanie! Oś symetrii $AC$ deltoidu może zawierać jego krótszą przekątną (rys. 1 (b)). Wówczas $25^2 - CE^2 = 39^2 - (30 - CE)^2$, co prowadzi do równości $CE = 1/15$ oraz $BD = 2 \cdot BE = 2\sqrt{25^2 - (1/15)^2}$. $\square$

**R2.** Trójkąty $ABC$, $ABC'$ z rysunku 2 mają równe pola i nie są przystające. Niech $D, D'$ będą obrazami $B$ w symetrii odpowiednio względem $AC$ i $AC'$. Wówczas deltoidy $ABCD$ i $ABC'D'$ spełniają warunki zadania: mają równe pola i odpowiednie boki oraz nietrudno sprawdzić, że są nieprzystające i wypukłe. $\square$

**R3.** Jeśli w dany czworokąt da się wpisać okrąg, to można go rozciąć na cztery deltoidy, jak na rysunku 3 (a), a następnie jeden z nich na kolejne cztery (bo w każdy deltoid wypukły można wpisać okrąg), łącznie uzyskując siedem deltoidów.

Jeśli zaś w dany czworokąt nie da się wpisać okręgu, to wpiszmy mały okrąg w dowolny z jego kątów i powiększajmy ten okrąg, aż dotknie jednego z pozostałych boków. Pozwala to podzielić dany czworokąt na czworokąt opisany na okręgu i trójkąt, a następnie na siedem deltoidów, jak na rysunku 3 (b). $\square$

**R4.** Niech $B', C'$ będą punktami styczności sfery wpisanej w czworościan ze ścianami odpowiednio $ADC, ADB$ (rys. 4). Wówczas $AB' = AC'$ i $DB' = DC'$ jako odcinki stycznych do tej sfery, więc $AB'DC'$ po rozpłaszczeniu jest deltoidem. Podobnie uzyskujemy pozostałe deltoidy. $\square$

**R5.** Taki czworokąt istnieje (rys. 5). $\square$

Inny przykład to czworokąt utworzony przez cztery z wierzchołków pięciokąta foremnego.

**W6.** Warto rozważyć romb $ACA'C'$ o środku w punkcie $B$. Oznaczmy przez $E$ punkt przecięcia drogi bili z odcinkiem $AC$, niech $E'$ będzie obrazem $E$ w symetrii względem $BC$. Wystarczy dowieść, że $AE' = E'C'$ i że odcinki te są równe rozprostowanym odpowiednim fragmentom drogi bili. Przyda się fakt, iż kąt padania bili równy jest kątowi odbicia.

**W7.** Twierdzenie Brianchona dla czworokąta opisanego na okręgu orzeka, że przekątne i proste łączące przeciwległe punkty styczności przecinają się w jednym punkcie. Wystarczy wykazać, że $\sphericalangle APK = \sphericalangle ANK$, korzystając np. z $AP \parallel KM$, z równoramienności trójkąta $KPM$ i z twierdzenia o stycznej i cięciwie.

Zad. 1 pochodzi z *Autorskiego Tygodnika Matematycznego TRAPEZ* Jarosława Wróblewskiego, zad. 3 z LXII Olimpiady Matematycznej, zad. 5 ze zbiorów Jerzego Bednarczuka, a zad. 7 z 18 Rosyjskiej Olimpiady Matematycznej. Dziękuję Łukaszowi Bożykowi i Krzysztofowi Ciesielskiemu za pomoc w gromadzeniu materiałów do tego artykułu.

*Niniejszy odcinek Deltoidu o okrągłym (w systemie jedenastkowym) numerze jest odcinkiem ostatnim. Nie kryjemy smutku z tego powodu, cieszymy się jednocześnie, że na naszych łamach ta wspaniała seria ukazywała się przez okrągłych 10 lat. Mamy nadzieję, że jeszcze wiele razy nazwisko Autorki zagości w naszym spisie treści.*

*Joasiu, za Twoją nienaganną punktualność w dostarczaniu materiałów, zegarmistrzowską dokładność przy ich korekcie, a przede wszystkim za deltoidową fantastyczność serdecznie dziękujemy!*

*Redakcja*