Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

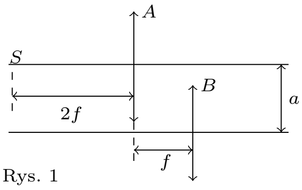
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2019

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

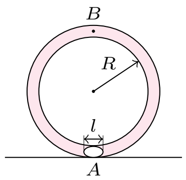
Zadania z fizyki nr 670, 671

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



Rys. 1

670. Znaleźć odległość między źródłem światła S i jego obrazem w układzie optycznym przedstawionym na rysunku 1. Ogniskowe soczewek A i B są jednakowe i równe f.

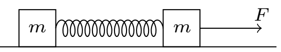


Rys. 2

671. Rurkę o średnicy dużo mniejszej od długości zwinięto w pierścień o promieniu R. Pierścień napełniono wodą, z wyjątkiem niewielkiego odcinka o długości l, gdzie znajduje się kropla oleju, i postawiono pionowo. W chwili początkowej (rys. 2) kropla zaczyna wypływać z punktu A w kierunku punktu B. Znaleźć jej prędkość, gdy mija punkt B. Gęstość wody wynosi ρ_w, oleju $\rho_o < \rho_w$. Długość kropli oleju jest dużo mniejsza od promienia pierścienia. Tarcie zaniedbujemy. Nie zachodzi przesączanie przez olejowy „korek".

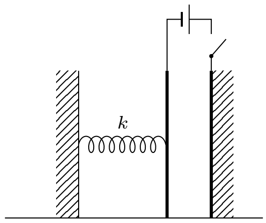
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2018

Przypominamy treść zadań:



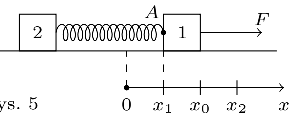
Rys. 3

662. Na poziomej płaszczyźnie leżą dwa klocki o jednakowych masach m, połączone nieważką sprężyną (rys. 3). Współczynnik tarcia klocków o płaszczyznę wynosi μ. Napięcie sprężyny ma wartość N. Jaką maksymalną stałą siłę F można przyłożyć do jednego z klocków, aby drugi nie ruszył z miejsca?



Rys. 4

663. W kondensatorze płaskim jedna okładka jest nieruchoma, a druga może poruszać się bez tarcia i jest połączona ze ścianą za pomocą sprężyny o współczynniku sprężystości k (rys. 4). Pole powierzchni każdej okładki wynosi S, początkowa odległość między nimi d. Okładki podłączono do źródła napięcia stałego. Przy jakiej maksymalnej wartości tego napięcia okładki nie zetkną się, jeżeli są stale równoległe względem siebie?



Rys. 5

662. Załóżmy, że po przyłożeniu siły F do pierwszego klocka (rys. 5) klocek drugi nie ruszy z miejsca. Niech oś x skierowana będzie wzdłuż sprężyny. Gdy sprężyna jest nieodkształcona, jej koniec A przyczepiony do pierwszego klocka ma współrzędną $x = 0$. Oznaczmy przez x_1 współrzędną punktu A w chwili początkowej. Zachodzi związek $kx_1 = \pm N$, gdzie k jest współczynnikiem sprężystości sprężyny. Znaki „$\pm$" odpowiadają sytuacjom, gdy sprężyna jest początkowo rozciągnięta lub ściśnięta. Po przyłożeniu siły klocek najpierw przyspiesza, mija położenie równowagi $x = x_0$, gdzie $kx_0 = F - \mu mg$, następnie jego prędkość maleje. W chwili, gdy prędkość klocka osiąga wartość zerową w punkcie $x = x_2$, zmiana energii sprężystości równa jest pracy siły F oraz tarcia $\frac{k\left(x_2^2 - x_1^2\right)}{2} = (F - \mu mg)\,(x_2 - x_1)\,,$ stąd $\frac{k(x_2+x_1)}{2} = F - \mu mg$. Ostatnie równanie wyraża warunek równowagi sił w położeniu $x = x_0$. Ponieważ klocek drugi nie rusza z miejsca, a siła F jest maksymalna, mamy dodatkowy warunek $kx_2 = \mu mg$. Szukana siła F dana jest wzorem $F = \frac{3\mu mg \pm N}{2}$.

663. W chwili początkowej kondensator jest naładowany ładunkiem $Q_1 = \frac{\mathcal{E}_0 SU}{d}$, a jego energia wynosi $W_1 = \frac{\mathcal{E}_0 SU^2}{2d}$, gdzie U jest napięciem między okładkami a $\mathcal{E}_0$ przenikalnością elektryczną próżni. Załóżmy, że ruchoma okładka zatrzyma się, gdy sprężyna zostanie rozciągnięta o $x = x_0 < d$. Do chwili zatrzymania ładunek na kondensatorze wzrośnie do wartości $Q_2 = \frac{\mathcal{E}_0 SU}{d-x}$, energia osiągnie wartość $W_2 = \frac{\mathcal{E}_0 SU^2}{2(d-x_0)}$, a źródło wykona pracę $W = (Q_2 - Q_1)\,U$. Zasada zachowania energii ma postać $W_1 + W = W_2 + \frac{kx_0^2}{2}$. Otrzymujemy stąd równanie $x_0^2 - x_0 d + \frac{\mathcal{E}_0 SU^2}{kd} = 0$. Ma ono rozwiązanie, gdy $\Delta = d^2 - \frac{4\mathcal{E}_0 SU^2}{kd} \geqslant 0$. Stąd szukana maksymalna wartość napięcia $U_{max} = \sqrt{\frac{d^3 k}{4\mathcal{E}_0 S}}$. Odpowiadająca jej odległość między okładkami ma wartość $\frac{d}{2}$.

Zadanie możemy też rozwiązać, rozważając siły działające na ruchomą okładkę kondensatora. Są to: siła sprężystości $F_1(x) = -kx$ i siła przyciągania elektrostatycznego między okładkami $F_2(x) = \frac{\mathcal{E}_0 SU^2}{2(d-x)^2}$. Jeżeli okładka zatrzyma się, gdy $x = x_0 \leqslant d$, to jej zmiana energii kinetycznej wynosi 0, a z drugiej strony równa jest pracy wypadkowej siły działającej na okładkę:

$$0 = -\frac{kx_0^2}{2} + \frac{\mathcal{E}_0 SU^2}{2}\int_0^{x_0} \frac{dx}{(d-x)^2}.$$

Stąd otrzymujemy takie samo równanie na x_0 jak w poprzednim rozwiązaniu.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2019

Zadania z matematyki nr 773, 774

Redaguje Marcin E. KUCZMA

773. Dana jest liczba nieparzysta $n \geqslant 3$. W każde pole kwadratowej planszy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb $-1, +1$ tak, że suma wszystkich wpisanych liczb wynosi 1. Wyznaczamy sumę liczb w każdym wierszu oraz sumę liczb w każdej kolumnie; dostajemy ciąg $2n$ liczb nieparzystych. Ile maksymalnie może być w tym ciągu liczb ujemnych?

774. Wyznaczyć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych m, n, że nierówność

$$\lfloor (m+n)a \rfloor + \lfloor (m+n)b \rfloor \geqslant \lfloor ma \rfloor + \lfloor mb \rfloor + \lfloor n(a+b) \rfloor$$

zachodzi dla każdej pary liczb rzeczywistych a, b.

Zadanie 774 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2018

Przypominamy treść zadań:

765. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Jego najmniejszy kąt wewnętrzny ma wierzchołek A. Zakładamy, że proste AD i BC przecinają się w punkcie P, zaś proste AB i DC przecinają się w punkcie Q, przy czym $AP \perp PQ$. Niech M będzie środkiem przekątnej BD. Wykazać, że $PM \perp AB$.

766. Znaleźć liczbę rzeczywistą $M > 5/2$ taką, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d, e zachodzi nierówność

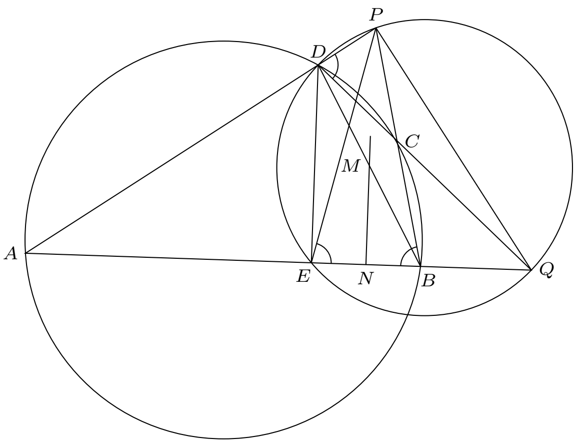
$$\sqrt[5]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[5]{\frac{b}{c+d}} + \sqrt[5]{\frac{c}{d+e}} + \sqrt[5]{\frac{d}{e+a}} + \sqrt[5]{\frac{e}{a+b}} \geqslant M.$$

Im większa liczba M, tym lepsze rozwiązanie.

765. Z założenia, że $\sphericalangle DAB$ jest najmniejszym kątem czworokąta $ABCD$, nietrudno wywnioskować, że punkt B leży między A i Q, a punkt D między A i P. Weźmy pod uwagę okrąg o średnicy DQ; ów okrąg przechodzi przez punkt P (bo $AP \perp PQ$) oraz przecina odcinek AQ w punkcie, który nazwiemy E; zatem $DE \perp QE$.

Każdy z czworokątów $ABCD$ i $PDEQ$ ma okrąg opisany. Wynikają stąd równości kątów $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle PDQ| = |\sphericalangle PEQ|$. Zatem trójkąt PEB jest równoramienny.

Niech N będzie środkiem odcinka EB. Skoro M jest środkiem odcinka DB, prosta NM jest równoległa do prostej DE – która jest prostopadła do AB. To znaczy, że prosta NM jest symetralną podstawy EB trójkąta równoramiennego PEB; przechodzi więc przez punkt P, i mamy tezę $PM \perp AB$.



766. Oznaczmy ilorazy widoczne pod symbolem pierwiastka kolejno: A, B, C, D, E (więc $A = a/(b+c)$, itd.). Wobec cykliczności można przyjąć, że $a = \max\{a, b, c, d, e\}$. Dalej oznaczmy

$$p = \max\{b, c\}, \qquad q = \max\{c, d\}, \qquad r = \max\{d, e\}$$

i odnotujmy dolne oszacowania:

$$A \geqslant \frac{a}{2p}, \quad B \geqslant \frac{b}{2q}, \quad C \geqslant \frac{c}{2r}, \quad \max\{C, D\} \geqslant \frac{q}{2a}, \quad \max\{D, E\} \geqslant \frac{r}{2a}.$$

Jeśli teraz $b \geqslant c$ (czyli $b = p$), wówczas

$$A^{1/5} + B^{1/5} + \left(C^{1/5} + D^{1/5}\right) \geqslant \left(\frac{a}{2p}\right)^{1/5} + \left(\frac{p}{2q}\right)^{1/5} + \left(\frac{q}{2a}\right)^{1/5}.$$

Jeśli natomiast $b \leqslant c$ (czyli $c = p$), wówczas

$$A^{1/5} + C^{1/5} + \left(D^{1/5} + E^{1/5}\right) \geqslant \left(\frac{a}{2p}\right)^{1/5} + \left(\frac{p}{2r}\right)^{1/5} + \left(\frac{r}{2a}\right)^{1/5}.$$

W obu przypadkach mamy po lewej stronie liczbę mniejszą niż rozważana suma $S = A^{1/5} + B^{1/5} + C^{1/5} + D^{1/5} + E^{1/5}$; zaś po prawej stronie – sumę trzech liczb, których iloczyn wynosi $2^{-3/5}$. Z nierówności między średnimi dostajemy oszacowanie $S > 3 \cdot 2^{-1/5}$. Liczba $M = 3 \cdot 2^{-1/5}$ spełnia wymagany warunek $M > 5/2$.

(Tę wartość M, wraz z powyższym uzasadnieniem, zaproponował pan Piotr Kumor, autor zadania; kto da więcej?).

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 763 ($WT = 1{,}63$) i 764 ($WT = 1{,}00$) z numeru 6/2018

Michał Miodek	Warszawa	44,28
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Piotr Kumor	Olsztyn	39,63
Marcin Małogrosz	Warszawa	38,00
Andrzej Kurach	Ryjewo	36,52
Krzysztof Kamiński	Pabianice	35,75
Paweł Kubit	Kraków	35,69

Michał Miodek – po raz trzeci! To trzydziesty ósmy Weteran Klubu 44 M.