



# Całkowita dyskrecja

Bartłomiej BZDEGA

W świecie liczb rzeczywistych z nierównością  $a < b$  niewiele da się zrobić, natomiast jeśli  $a$  i  $b$  są liczbami całkowitymi, to możemy ją wzmocnić:  $a + 1 \leq b$ . W zadaniach 1, 2 i 3 korzystamy z tej własności liczb całkowitych.

Nie jest to obserwacja szczególnie głęboka, ale wartościowa dzięki swym liczным zastosowaniom, przeformułowanym i uogólnieniom. Możemy, dla przykładu, powiedzieć, że pomiędzy dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi nie ma żadnej innej liczby całkowitej, a pomiędzy kwadratami liczb naturalnych nie ma żadnych kwadratów liczb naturalnych; analogicznie dla liczb pierwszych czy wielokrotności ustalonej liczby – w ogólności dla dowolnego ciągu rosnącego. Takie spostrzeżenia są użyteczne w zadaniach 4, 5 i 6.

Można stosować jeszcze nieco inne podejście: w każdym ograniczonym przedziale znajduje się tylko skończenie wiele liczb całkowitych. Jeżeli więc uda się jakąś niewiadomą z zadania oszacować z góry i z dołu, to możemy uwzględnić wszystkie jej możliwe wartości, rozpatrując kilka przypadków. Takie postępowanie stosujemy w zadaniach 7 i 8.

Użyteczny bywa również następujący wniosek: jeśli w pewnym zbiorze znajdziemy  $n$  różnych liczb naturalnych, to co najmniej jedna z nich jest większa lub równa  $n$ . Ten motyw występuje w zadaniach 9 i 10.

**Zadania.** (Uwaga. Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną.)

1. Udowodnić, że nie istnieją liczby naturalne  $a, b$  i  $c$ , które spełniałyby równość  $a^a + b^b = c^c$ .
2. Wykazać, bez powoływania się na Wielkie Twierdzenie Fermata, że jeśli liczby naturalne  $a, b, c$  oraz  $n \geq 2$  spełniają równość  $a^n + b^n = c^n$ , to  $a, b, c > n$ .
3. Ciąg  $(a_n)$  liczb naturalnych spełnia warunki  $a_{2n} = 3a_n - 1$  i  $a_{2n+1} = 3a_n + 1$  dla wszystkich naturalnych  $n$ . Dowieść, że jest to ciąg rosnący.
4. Dowieść, że sumę dwóch kolejnych liczb pierwszych większych od 2 można przedstawić w postaci iloczynu trzech liczb naturalnych większych od 1.
5. Liczby  $a$  i  $b$  są naturalne. Dowieść, że istnieje taka liczba naturalna  $n$ , dla której  $a \cdot 2^n + b$  nie jest kwadratem liczby naturalnej.
6. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony, rosnący ciąg liczb naturalnych  $(a_n)$ , który spełnia warunki:  $a_n \mid a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$  oraz  $a_n < a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$  dla wszystkich  $n \geq 4$ .
7. Dla jakich liczb naturalnych  $n$  zachodzi podzielność  $1 + 2^n + 4^n \mid 1 + 2^{n+1} + 4^{n+1}$ ?
8. Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych  $(a, b)$ , dla których liczby  $a^3 + 6ab + 1$  i  $b^3 + 6ab + 1$  są sześcianami liczb naturalnych.
9. Niech  $a_1, a_2, \dots, a_n$  będą liczbami naturalnymi. Dowieść, że  $\text{NWW}(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq n \cdot \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .
10. Zbiór  $A$  stanowi  $n \geq 4$  liczb naturalnych, przy czym spełniony jest warunek  $\text{NWW}(a, b) > c$  dla wszystkich parami różnych  $a, b, c \in A$ . Dowieść, że suma odwrotności elementów zbioru  $A$  jest mniejsza od 2.

**Wskazówki do zadań**

1. Przyjmijmy, dla dowodu nie wprost, że  $a^a + b^b = c^c$ . Bez straty ogólności  $a \geq b$ . Można z tego wywnioskować nierówność  $2a^a \geq (a+1)^a \geq b^a + a^{b-n-1}$ , która prowadzi do sprzeczności.

2. Bez straty ogólności niech  $a \leq b < c$ . Należy uzasadnić i wykorzystać nierówność  $c^n \geq (b+1)^n > b^n + n b^{n-1}$ , z której da się wywnioskować, że  $a > n$ .

3. Dość łatwo wykazać, że  $a_2 < a_1$ . Zależny indukcyjnie, przy ustalonym  $n \geq 2$ , że  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ . Trzeba dowieść, że  $a_{n+1} > a_n$ . Należy tu rozważyć dwa przypadki:  $n = 2t$  oraz  $n = 2t + 1$  dla pewnego całkowitego dodatniego  $t$ . Pierwszy przypadek jest natychmiastowy i nie wymaga nawet skorzystania z założenia indukcyjnego. W drugim korzystamy z nierówności  $a_{t+1} > a_t$ , którą zapiszemy w postaci  $a_{t+1} \geq a_t + 1$ .

4. Jaką liczbą jest średnia arytmetyczna dwóch kolejnych liczb pierwszych, większych od 2?

5. Przyjmijmy, że liczba  $a \cdot 2^n + b$  jest kwadratem dla każdego naturalnego  $n$ . Wtedy liczby  $a \cdot 2^{n+2} + b$  i  $4(a \cdot 2^n + b)$  też są kwadratami, a różnica między nimi dla odpowiednio dużych  $n$  jest za mała.

6. Przyjmijmy, że taki ciąg istnieje. Wykazujemy przez indukcję, że  $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = 2a_n$  dla wszystkich  $n \geq 4$ . Z tego trzeba wywnioskować równość  $a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$  dla wszystkich  $n \geq 4$ , a to prowadzi do sprzeczności.

7. Iloraz  $\frac{1+2^{n+1}+4^{n+1}}{1+2^n+4^n}$  jest liczbą naturalną i dość łatwo oszacować go z góry i z dołu. Poem rozważamy wszystkie możliwości.

8. Przyjmijmy, że  $a \geq b$ . Wtedy  $a^3 + 6ab + 1 \leq a^3 + 6a^2 + 1 > a^3 + 2b^3 + 1$ . Podstawiając tę wartość; czyli  $a = 2b + 1$ . Podstawiając tę wartość; używamy oszacowania  $b^3 > (b+4)^3 + 1 > (b+4)^3 + 6ab + 1$  i mamy trzy przypadki do rozważania.

9. Niech  $W = \text{NWW}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Liczby  $\frac{a_1}{W}, \frac{a_2}{W}, \dots, \frac{a_n}{W}$  są naturalne i różne.

10. Niech  $M$  będzie największą liczbą w zbiorze  $A$ . Każde  $a \in A$  ma  $\lfloor M/a \rfloor$  wielokrotności, które nie przekraczają  $M$ . Z treści zadania wynika, że wszystkie te wielokrotności są różne.