

Problem samotnego kolarza

Jarosław GRZYTCZUK*

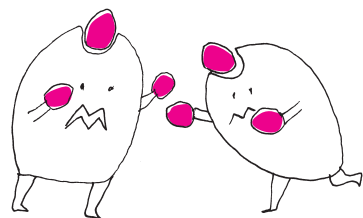
Na torze w kształcie okręgu o obwodzie jednostkowym ściga się n kolarzy. Każdy pędzi z inną, ale stałą prędkością. Wystartowali z tego samego punktu, jadą w tym samym kierunku. Jest ciemno, nic nie widać, choć oko wykol. Dlatego każdy kolarz ma w rowerze włączoną lampę przednią, która oświetla otwarty łuk toru długości $\frac{1}{n}$. Kolarz jest *samotny*, jeżeli w pewnej chwili nie widzi przed sobą nikogo ani nikt inny nie oświetla go z tyłu.

Hipoteza 1. *Każdy kolarz będzie kiedyś samotny.*

Tę melancholijną hipotezę postawił Jörg Michael Wills w roku 1967, w kontekście aproksymacji diofantycznych. Dla $n = 1$ jest ona trywialnie prawdziwa. Dla $n = 2$ jest niemal oczywista: w pewnym momencie dwaj kolarze pędzący z różnymi prędkościami muszą znaleźć się na końcach średnicy toru, wtedy obydwaj staną się samotni. Ale dla $n = 3$ zadanie nie jest już całkiem banalne (zachęcamy Czytelnika do przeprowadzenia ścisłego dowodu hipotezy). Do dzisiaj hipoteza została potwierdzona jeszcze dla $n = 4, 5, 6, 7$. Stopień komplikacji w kolejnych przypadkach rośnie, np. dowód hipotezy dla sześciu kolarzy rozciąga się na niemal pięćdziesięciu stronach wydruku.

Co tedy robić? George Pólya radzi: *Dla każdego problemu, którego nie potrafisz rozwiązać, istnieje łatwiejszy problem, którego też nie będziesz potrafił rozwiązać. Znajdź go.*

Może osłabić lampy w rowerach? Nietrudno dowieść, że przy lampach o zasięgu dwukrotnie mniejszym hipoteza jest prawdziwa. Najpierw zauważmy, że nie tracimy ogólności przy zmniejszeniu lub zwiększeniu wszystkich prędkości o tę samą wartość. Możemy zatem przyjąć, że jeden z kolarzy, dowolnie wybrany, pędzi z prędkością zero, czyli właściwie stoi w punkcie startu. Po wyzerowaniu wybranego kolarza mogą się pojawić kolarze z ujemnymi prędkościami, czyli jadący do tyłu. Tych należy zastąpić jadącymi w tym samym tempie do przodu. Zabieg ten nie ma znaczenia dla samotności stojącego kolarza.



To rozumowanie prowadzi do nieco innego, acz równoważnego sformułowania wyjściowego problemu. Przypuśćmy, że w punkcie startu kolarzy stoi lampa oświetlająca łuk otwarty o rozpiętości $\alpha > 0$. Kolarze jadą z prędkościami dodatnimi w tym samym kierunku. Lampy w rowerach są wygaszone. Czekamy na moment, w którym żadnego kolarza nie będzie w oświetlonym łuku. Przy założeniu, że ściga się n kolarzy i $\alpha = \frac{1}{n+1}$, Hipoteza 1 może być sformułowana w jeszcze bardziej posępny, ale równoważny, sposób.

Hipoteza 2. *Cały peleton zniknie kiedyś w ciemności.*

Obliczymy teraz, jak długo pojedynczy kolarz przebywa w oświetlonym łuku podczas całego wyścigu. Niech v będzie liczbą całkowitą dodatnią wyrażającą prędkość kolarza (nietrudno uzasadnić, że ograniczenie do liczb całkowitych nie zmniejsza ogólności zagadnienia). Przyjmijmy zatem, że kolarz pokonuje v okrążeń toru w jednostce czasu. Po jej upływie wszyscy kolarze znajdują się ponownie razem w punkcie startu. Możemy więc przyjąć, że wyścig kończy się w tym momencie, gdyż nic nowego na torze już się nie wydarzy. Zgodnie ze wzorem na drogę w ruchu jednostajnym czas przejazdu kolarza przez łuk długości 2α wynosi $\frac{2\alpha}{v}$. W ciągu całego wyścigu takich przejazdów jest dokładnie v , przy czym na jeden z nich składa się pierwszy i ostatni przejazd przez połowę świetlnego łuku. Stąd łączny czas przejazdu kolarza przez rejon światła to 2α . Wielkość ta jest niezależna od v , co nie jest chyba zaskakujące: szybszy kolarz szybciej mknie przez rejon światła, ale za to częściej weń wpada. Jeżeli przyjmijmy teraz, że $\alpha = \frac{1}{2n}$, to widzimy, że całkowity czas, w którym przynajmniej jeden kolarz był w łuku

świetlnym, wynosi co najwyżej 1. W rzeczywistości nie może być on równy 1, gdyż początkowo wszyscy kolarze są w pobliżu lampy. Musi zatem istnieć moment, w którym cały peleton zginie w gęstym mroku.

Wyobraźmy sobie teraz, że możemy regulować moc lampy, zwiększając stopniowo jej zasięg, począwszy od rozpiętości $\alpha = \frac{1}{2n}$. Zjawisko znikania peletonu w mroku będzie zapewne zachodzić przy delikatnym zwiększeniu mocy, ale pytanie jak długo? Hipoteza 2 mówi, że aż do $\alpha = \frac{1}{n+1}$. Tej ostatniej granicy nie da się już przekroczyć, co widać na przykładzie n kolarzy jadących z prędkościami $1, 2, \dots, n$. Jak dotąd, nikomu nie tylko nie udało się zbliżyć do hipotetycznej granicy, ale wręcz znacząco oddalić się od początkowej rozpiętości $\alpha = \frac{1}{2n}$. Nie wiadomo nawet tego, czy Hipoteza 2 zachodzi przy $\alpha = \frac{1}{(2-\epsilon)n}$ dla jakiegokolwiek $\epsilon > 0$. Najlepszy obecnie rezultat, należący do Terrenca Tao, potwierdza ją jedynie dla dostatecznie dużych n przy $\alpha = \frac{1}{2n} + \frac{c \log n}{(n \log \log n)^2}$, gdzie c jest stałą dodatnią. Inną prostą konsekwencją powyższych dywagacji jest taki oto dziwny fakt. Jak wykazaliśmy, całkowity czas pobytu każdego kolarza w rejonie światła wynosi 2α , niezależnie od jego prędkości. Składa się on z rozłącznych odcinków czasowych. Jeżeli $\alpha = \frac{1}{n+1}$, to suma długości wszystkich tych odcinków wynosi $\frac{2n}{n+1} < 2$. Co to znaczy? Pokolorujmy odcinki czasowe każdego kolarza innym kolorem, powiedzmy, kolorem jego koszulki. Mamy więc kolekcję odcinków w n kolorach pokrywających jakoś jednostkowy przedział czasu. Całkowita suma ich długości jest mniejsza od 2. Musi zatem istnieć punkt pokryty co najwyżej jednym kolorem. Jest to punkt w czasie, w którym co najwyżej jeden kolarz znajduje się w rejonie światła. Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *W każdym peletonie istnieje kolarz, którego dyskwalifikacja gwarantuje zniknięcie pozostałych kolarzy w mroku.*

Niestety, nie wiemy, który to kolarz. Gdyby teza twierdzenia zachodziła dla dowolnie wybranego kolarza, oznaczałoby to, że Hipoteza 2 jest prawdziwa przy $\alpha = \frac{1}{n+2}$, co w porównaniu ze wspomnianym rezultatem Tao byłoby zaiste rewelacją. Powyższe twierdzenie skłania do następującego osłabienia Hipotezy 1, o które zapytał Joel Spencer.

Hipoteza 3. *W każdym peletonie istnieje kolarz, który będzie kiedyś samotny.*

Jest rzeczą zadziwiającą, że mimo tak znacznego osłabienia tezy, wszak zamieniliśmy kwantyfikator ogólny na egzystencjalny, niczego istotnego nie udało się udowodnić.

Na koniec przedstawimy jednak pewien nieprawdopodobny wynik, który budzi nadzieję na ostateczne zwycięstwo. Rozważmy sytuację, w której prędkości kolarzy wybieramy losowo ze zbioru $\{1, 2, \dots, N\}$. Niech P_N oznacza prawdopodobieństwo, że taki losowy peleton spełnia Hipotezę 2.

Jeżeli jest ona prawdziwa, to, oczywiście, $P_N = 1$ dla każdego $N \geq n$. Powiemy, że Hipoteza 2 jest *prawie na pewno* prawdziwa, jeżeli $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = 1$.

Poniższe twierdzenie, udowodnione przez Sebastiana Czerwińskiego, pokazuje, że dużo silniejsza wersja Hipotezy 2 jest prawie na pewno prawdziwa.

Twierdzenie 2. *Losowy peleton prawie na pewno zniknie w ciemności, nawet jeżeli prawie cały tor jest oświetlony.*

Mamy tu na myśli, że Hipoteza 2 jest prawie na pewno prawdziwa przy $\alpha = \frac{1}{2} - \epsilon$, dla każdego $\epsilon > 0$. Twierdzenie to wzmocnił i uogólnił Noga Alon, upraszczając przy okazji dowód Czerwińskiego. Udowodnił on, że dowolnie wybrani kolarze losowego peletonu znajdą się w pewnej chwili dowolnie blisko dowolnie wybranych punktów toru.

- [1] N. Alon, *The chromatic number of random Cayley graphs*, European J. Combin. 34 (2013), no. 8, 1232–1243.
- [2] J. Barajas, O. Serra, *The lonely runner with seven runners*, Electron. J. Combin. 15 (2008), R48, 18 pp.
- [3] W. Bienia, L. Goddyn, P. Gvozdzjak, A. Sebö, M. Tarsi, *Flows, view obstructions and the lonely runner*, J. Combin. Theory Ser. B 72 (1998), 1–9.
- [4] T. Bohman, R. Holzman, D. Kleitman, *Six lonely runners*, In honor of Aviezri Fraenkel on the occasion of his 70th birthday, Electron. J. Combin. 8 (2001), no. 2, Research Paper 3, 49 pp.
- [5] S. Czerwiński, *Random runners are very lonely*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 119 (2012), no. 6, 1194–1199.
- [6] S. Czerwiński, J. Grytczuk, *Invisible runners in finite fields*, Inform. Process. Lett. 108 (2008) 64–67.
- [7] G. Perarnau, O. Serra, *Correlation among runners and some results on the lonely runner conjecture*, Electron. J. Combin. 23 (2016), no. 1, Paper 1.50, 22 pp.
- [8] T. Tao, *Some remarks on the lonely runner conjecture*, arXiv:1701.02048.
- [9] J.M. Wills, *Zwei Sätze über inhomogene diophantische Approximation von Irrationalzahlen*, Monatsch. Math. 71 (1967), 263–269.