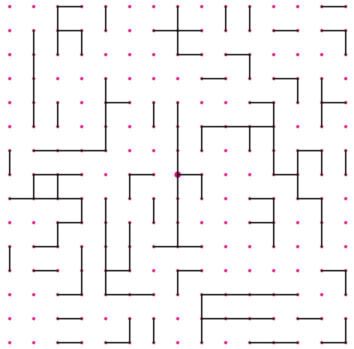
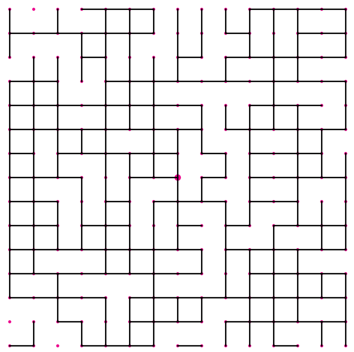
Perkolacje

Piotr MIŁOŚ[*]



Rys. 1. Woda płynie wzdłuż czarnych linii.



Rys. 2

Wyobraźmy sobie porowaty materiał, może to być gleba, a może to być ... ubita kawa w kawiarce. Czy przez ten materiał można przesączyć wodę? Intuicyjnie wiemy, że jest to możliwe w przypadku kawy, ale już w przypadku gleby zależy od jej rodzaju, a dokładniej – od struktury „porów wolnej przestrzeni". W roku 1957 matematycy angielscy, Simon Broadbent i John Hammersley, zaproponowali probabilistyczny model opisujący materiały porowate. Pomimo prostoty definicji model ten (zwany *perkolacjami*) okazał się fascynującym tematem badań. Wspomnijmy, że, między innymi, za wyniki dotyczące perkolacji Stanisław Smirnow został nagrodzony w 2010 roku najwyższym matematycznym wyróżnieniem, Medalem Fieldsa.

Czym jest perkolacja? Wyobraźmy sobie stronę zeszytu w kratkę. Każda jej krawędź może być otwarta („przepuszczająca wodę") lub zamknięta („nieprzepuszczająca wody"). O otwarciu krawędzi decydujemy w sposób losowy, rzucając kostką sześcienną. Rozważmy dwa przypadki. W pierwszym z nich otwieramy krawędź, gdy na kostce wypadnie 1 lub 2. Rysunek 1 przedstawia przykładowy rezultat takiego losowego doświadczenia – jak widać, nie istnieje otwarta ścieżka z góry na dół, którą woda mogłaby przepłynąć. W drugim przypadku otwieramy krawędź, gdy na kostce wypadnie jedna z liczb $1, 2, 3, 4$. Intuicyjnie łatwo stwierdzić, że szansa przepłynięcia wody gwałtownie rośnie, co ilustruje drugi rysunek. Wspomniani już Broadbent i Hammersley przekuli powyższe intuicje w abstrakcyjny model matematyczny. Rozważmy nieskończony graf regularny (może to być nieskończona kartka w kratkę, czyli graf $\mathbb{Z}^2$). Każdą z jego krawędzi otwieramy niezależnie z pewnym prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$. Kluczowe w teorii perkolacji jest pytanie „jakie jest prawdopodobieństwo, że krawędzie otwarte łączą się w nieskończony zbiór?". Intuicyjnie jest oczywiste, że szansa ta zwiększa się wraz ze wzrostem p. Sugeruje to istnienie takiego prawdopodobieństwa krytycznego p_c, że dla $p < p_c$ nie ma nieskończonego zbioru otwartego (woda nie może przepływać), a dla $p > p_c$ taki zbiór ma szansę powstać. Jednym z pierwszych osiągnięć teorii perkolacji było pokazanie, że prawdopodobieństwo krytyczne dla $\mathbb{Z}^2$ jest nietrywialne, mianowicie, że $0 < p_c < 1$.

Może być to zaskakujące, ale wiele problemów matematycznych łatwiej opisuje się w przypadku nieskończonym. Także dla perkolacji łatwiej jest je analizować na nieskończonym grafie.

$0 < p_c < 1$ dla dowolnej kraty $\mathbb{Z}^d, d \geqslant 2$. Dla małych p zbiory krawędzi otwartych są skończone, a dla p bliskich 1 istnieje (jeden) zbiór nieskończony.

Pokażemy teraz szkic argumentu pokazującego, że dla $\mathbb{Z}^2$ mamy $p_c \geqslant 1/3$. Rozważmy kwadrat na kartce papieru o boku $2n + 1$, czyli zbiór $\{-n, -n + 1, \ldots, n - 1, n\}^2$. Zastanówmy się, czy środek tego kwadratu jest połączony za pomocą krawędzi otwartych z jakimś punktem brzegu. Jeśli tak, to istnieje ścieżka o długości n złożona z krawędzi otwartych, zaczynająca się w $(0, 0)$ (np. będąca częścią ścieżki otwartej do brzegu). Zauważmy, że liczbę wszystkich ścieżek o długości n możemy oszacować przez $4 \cdot 3^{n-1}$. Szansa na to, że każda z krawędzi takiej ścieżki jest otwarta, wynosi p^n (korzystamy z założenia o niezależności). Jeden z podstawowych wyników teorii prawdopodobieństwa mówi, że szansa na otwarcie przynajmniej jednej ścieżki jest mniejsza niż suma prawdopodobieństw otwarcia poszczególnych ścieżek, co w naszym przypadku wynosi $\frac{4}{3} \cdot (3p)^n$. W ostatnim kroku obserwujemy, że liczba ta jest bardzo mała, gdy $p < 1/3$, a n jest duże. W związku z tym łatwo uwierzyć (a także matematycznie wykazać), że każdy z połączonych zbiorów krawędzi otwartych będzie wtedy skończony. Nasze rozważania pokazują zatem, że $p_c \geqslant 1/3$.

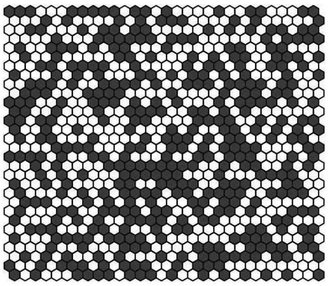
Istotnie, w pierwszym kroku możemy wyjść w 4 kierunkach. Następnie w każdym kroku mamy do wyboru trzy kierunki dalszego podążania (cofanie nie wydłuża ścieżki).

W przypadku $p = 1/3$ to rozumowanie daje trywialne szacowanie 4/3 na szansę połączenia środka z brzegiem. Symulacja komputerowa pokazuje, że dla $n = 7$ szansa ta wynosi około 8% (przykładowy rezultat takiej symulacji pokazany jest na pierwszym rysunku).

Podobny, choć trudniejszy, argument pokazuje, że dla p bliskich jedynki nieskończony zbiór otwarty zawierający $(0, 0)$ ma szansę powstać. Zachęcamy Czytelnika do próby uzasadnienia tego faktu. Kluczową obserwacją jest to, że jeśli zbiór jest skończony, to istnieje „pętla" otaczająca $(0, 0)$, przecinająca jedynie zamknięte krawędzie.

Główną trudnością w analizie perkolacji są nietrywialne zależności geometryczne. Jednocześnie są one źródłem wielu ciekawych fenomenów sprawiających, że

[*] Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Przykład perkolacji na plastrze miodu. Woda płynie przez pola ciemne.

perkolacje są interesującym modelem. W naszej analizie badaliśmy „oddzielnie” ścieżki długości n, tymczasem wiele z nich się pokrywa. Mimo że przedstawione argumenty można poprawić, uzyskanie wartości p_c wymagało znacznie bardziej zaawansowanych metod, których opracowanie trwało 20 lat i zostało uwieńczone dowodem Harrego Kestena pokazującym, że $p_c = 1/2$.

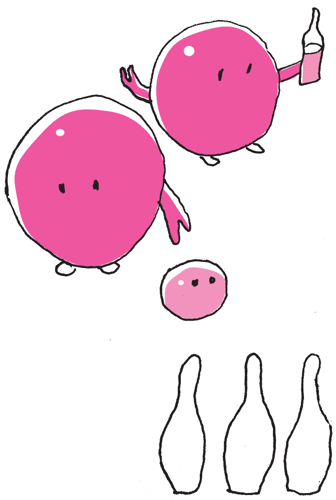
Uzyskanie dokładnych wartości prawdopodobieństwa krytycznego dla innych grafów często jest niemożliwe. Zaskakująco nie przeszkadza to w badaniu zachowania perkolacji w punkcie krytycznym. Jest to najbardziej aktywne pole rozwoju teorii (te zagadnienia były badane przez Smirnowa). Mimo że wykazano to ściśle w małej ilości przypadków, spodziewamy się, że zachowanie w dużej skali w tym punkcie zależy głównie od wymiaru grafu (na przykład zachowanie perkolacji na „kartce w kratkę” będzie podobne jak na „plastrze miodu”). Fenomen ten, zwany uniwersalnością, jest przedmiotem intensywnych badań, poprzez swoje związki z innymi dziedzinami matematyki. Zapewne w najbliższych latach doprowadzi do nowych fascynujących wyników.

Interpretacje teorii kwantów

*Jan CHWEDEŃCZUK**

* Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Drobne pęknięcia fundamentów mechaniki klasycznej i klasycznej elektrodynamiki, które objawiły się w drugiej połowie XIX wieku, doprowadziły do niewyobrażalnego przełomu naukowego i technologicznego. Narodziła się mechanika kwantowa, a opowieść o jej sformułowaniu i zaprzęgnięciu do realizacji naszych potrzeb to historia triumfu ludzkiego umysłu – narządu, który pierwotnie służył przede wszystkim do gonienia mamuta. Trudno wymienić wszystkie korzyści, jakie na co dzień czerpiemy ze znajomości tej teorii. Układy scalone w każdym komputerze czy telefonie komórkowym oparte są na tranzystorach półprzewodnikowych, których konstrukcja wymaga znajomości kwantowej teorii ciała stałego. Tenże telefon prawdopodobnie umożliwia komunikację w ramach systemu GPS, który działa dzięki precyzyjnej znajomości jednostki czasu. Kiedyś sekundę definiowało się jako ułamek doby ziemskiej, współczesna sekunda to 9 192 631 770 okresów oscylacji elektronu w wyniku przejścia między dwoma poziomami energetycznymi w atomie cezu 133 [1]. W przyszłości jednostka czasu oparta będzie na jeszcze bardziej egzotycznym zjawisku kwantowym – periodyczny sygnał pochodzić będzie od przejścia między dwoma poziomami energetycznymi w samym jądrze atomowym, tym razem atomu toru 229 [2]. Oscylacje takie wzbudza się laserem, który stanowi jeszcze jeden przykład spożytkowania zjawisk kwantowych. Laser znajduje zastosowanie w medycynie, odtwarzaczach płyt CD czy w laboratoriach badawczych. Wszystko wskazuje na to, że najbliższe lata przyniosą rozkwit technologii kwantowych, o ile tylko globalny konflikt bądź dramatyczne zmiany klimatyczne nie zahamują rozwoju cywilizacyjnego. Grafen, fuzja jądrowa, czy nano-technologie – przyszłość rysuje się kwantowo.



Oprócz zastosowań technologicznych ważny jest filozoficzny aspekt teorii kwantów i jej wpływ na nasze rozumienie otaczającego świata. W klasycznym ujęciu cząstka (na przykład elektron albo piłka tenisowa) porusza się po trajektorii zdeterminowanej przez działające nań siły. Mechanika kwantowa nie dopuszcza istnienia dokładnie określonych trajektorii. W zamian opisuje cząstki za pomocą funkcji falowej, która pozwala na „współistnienie” wielu położeń i pędów naraz. To tak, jakby rysować tor cząstki na kartce grubym flamastrem, a nie cienkopisem. Teoria kwantów określa, jak gruba jest kreska i po jakiej krzywej podąża, ale nie dopuszcza, by flamaster był nieskończenie cienki, jak to ma miejsce w przypadku klasycznym.

Skoro funkcja falowa jest „rozmyta”, to można by przyjąć, że mechanika kwantowa przewiduje, że cząstka jest w wielu miejscach naraz. I tu zaczynają się schody – albowiem takie stwierdzenie jest jawnie sprzeczne z wynikami obserwacji empirycznych. Ilekroć bowiem spojrzymy na obiekt fizyczny, jest on dobrze zlokalizowany w przestrzeni. Innymi słowy, elektron jest punkcikiem