Kolorowa płaszczyzna

Joanna JASZUŃSKA

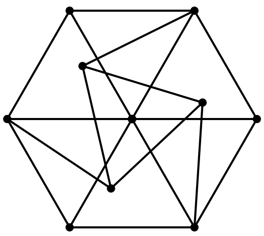
Większości problemów otwartych współczesnej matematyki nie da się zrozumieć bez zaawansowanej wiedzy, ale zdarzają się też takie, których sformułowania są zupełnie elementarne. Poniższa seria zadań prowadzi do jednego z nich.

1. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na czerwono lub żółto. Wykaż, że istnieją dwa punkty odległe o 1 i tego samego koloru.

2. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na czerwono, żółto lub niebiesko. Wykaż, że istnieją dwa punkty odległe o 1 i tego samego koloru.

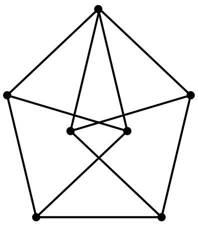
3. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z siedmiu kolorów. Wykaż, że nie muszą istnieć dwa punkty odległe o 1 i tego samego koloru.

4. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z ośmiu kolorów. Wykaż, że nie muszą istnieć dwa punkty odległe o 1 i tego samego koloru.



Rys. 1. Graf Golomba: 10 wierzchołków, wszystkie krawędzie długości 1.

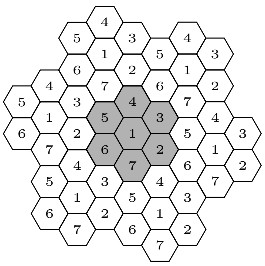
Podsumowując, jeśli każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z n kolorów, to dla $n = 1, 2, 3$ muszą istnieć dwa punkty odległe o 1 i tego samego koloru, dla $n \geqslant 7$ nie muszą i jeśli dla pewnego n nie muszą, to dla większych n też nie muszą. *Liczba chromatyczna płaszczyzny* $\chi(\mathbb{R}^2)$ to najmniejsza wartość n, dla której rozważane punkty nie muszą istnieć; powyżej uzasadniliśmy, że $4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$.



Rys. 2. Wrzeciono Mosera: 7 wierzchołków, wszystkie krawędzie długości 1.

Dokładna wartość $\chi(\mathbb{R}^2)$ nie jest znana, jest to tzw. *problem Hadwigera–Nelsona*. Sformułowanie i powyższe rezultaty pochodzą z lat 1950–60 i do niedawna nic więcej nie było wiadomo. W kwietniu 2018 roku Aubrey de Grey opublikował w internecie pracę [AdG], w której udowodnił, że $\chi(\mathbb{R}^2) \geqslant 5$. Skonstruował graf o 1581 wierzchołkach i 7877 krawędziach długości 1 i pokazał (wspomagając się komputerem), że nie da się pomalować jego wierzchołków czterema kolorami bez krawędzi o jednobarwnych końcach. Dowód ten szybko sprawdzono, a następnie w ramach internetowego projektu *Polymath 16* [P16] ruszyły zbiorowe poszukiwania mniejszego grafu o tej własności (najlepiej nie wymagającego komputera do badania go). We wrześniu 2018 roku najmniejszy znany taki graf miał 553 wierzchołki i 2722 krawędzie.

W konstrukcji grafu z pracy [AdG] wykorzystano m.in. następujące obserwacje.



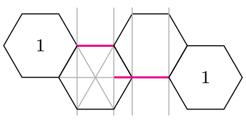
Rys. 3. Liczby oznaczają kolory, szary obszar to powtarzający się fragment. Punkty z linii podziału mają barwę dowolnego z sąsiednich sześciokątów.

5. Wykaż, że cztery dolne wierzchołki grafu z rysunku 5 leżą na jednej prostej oraz że dwa skrajne z nich wraz z najwyższym tworzą trójkąt równoboczny.

6. Rozważmy wierzchołki i środek sześciokąta foremnego o boku długości 1. Wyznacz liczbę istotnie różnych kolorowań tych siedmiu punktów najwyżej czterema barwami bez punktów odległych o 1 tego samego koloru.

Rozwiązania niektórych zadań

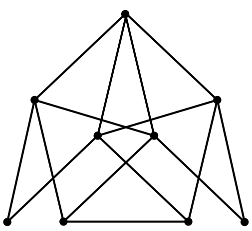
R1. Trzy wierzchołki dowolnego trójkąta równobocznego o boku długości 1 pomalowano dwoma kolorami, więc pewne dwa są tej samej barwy i odległe o 1. □



Rys. 4

R2. Nie da się pomalować wierzchołków grafu z rysunku 1 trzema kolorami bez krawędzi o końcach jednego koloru. Jeśli bowiem środkowy punkt jest czerwony, to wierzchołki sześciokąta muszą być na przemian żółte i niebieskie. Jeśli punkty połączone z wewnętrznym trójkątem są niebieskie, to jego wierzchołki mogą być tylko czerwone i żółte, a to jak już wiemy daje tezę. □

Zamiast grafu Golomba można w dowodzie użyć grafu z rysunku 2 lub z *Delty* 2/2013 (str. 22).



Rys. 5. Wszystkie krawędzie są długości 1.

R3. Podzielmy płaszczyznę na sześciokąty foremne o średnicy 0,99 i pomalujmy jak na rysunku 3. Wówczas wewnątrz żadnego z sześciokątów nie zmieści się odcinek o długości 1, natomiast odcinki o końcach w różnych sześciokątach tego samego koloru mają długość większą niż 1 (co najmniej 1,25 średnicy; rys. 4). □

R4. Dla ośmiu i więcej kolorów wystarczy wziąć pokolorowanie dla siedmiu i na każdy nowy kolor przemalować inny pojedynczy punkt, który był koloru 1. □

Literatura:

[AdG] `arxiv.org/abs/1804.02385`

[P16] `michaelnielsen.org/polymath1/index.php?title=Hadwiger-Nelson_problem`