Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 771, 772

Redaguje Marcin E. KUCZMA

771. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające równanie

$$f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

dla każdej pary różnych liczb rzeczywistych a, b, których różnica jest liczbą całkowitą.

772. Niech $M_n = 2^n - 1$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Udowodnić, że następujące dwa warunki są równoważne:

(1) $2^n \equiv 2 \pmod{n}$;

(2) $2^{M_n} \equiv 2 \pmod{M_n}$.

Zadanie 772 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Zadania z fizyki nr 668, 669

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

668. Nauczyciel, zwrócony twarzą do tablicy, obserwuje klasę dzięki odbiciu światła od powierzchni szkieł jego okularów. Nauczyciel widzi dwa obrazy ucznia, który siedzi w odległości 5 m od niego. Jeden obraz znajduje się w odległości 5 m, drugi w odległości $\frac{5}{7}$ m od nauczyciela. Po odwróceniu do klasy nauczyciel widzi przez okulary obraz tego samego ucznia w odległości 2,5 m. Wyznaczyć współczynnik załamania szkła, z którego wykonane są soczewki okularów.

669. Do naczynia w kształcie cylindra o polu przekroju poprzecznego S wlano wodę, w której pływa kawałek lodu z kulką ołowianą wewnątrz. Objętość lodu razem z kulką jest równa V. Nad wodę wystaje $\frac{1}{n}$ część tej objętości. Jak zmieni się poziom wody w naczyniu po stopieniu lodu? Gęstości wody, lodu i ołowiu wynoszą odpowiednio ρ_W, ρ_L, ρ_O.

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2019

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 761 ($WT = 1{,}87$) i 762 ($WT = 2{,}08$) z numeru 5/2018

Janusz Olszewski	Warszawa	45,72
Tomasz Choczewski	Szczecin	44,36
Tomasz Wietecha	Tarnów	44,19
Michał Miodek	Warszawa	41,65
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Piotr Kumor	Olsztyn	38,63
Krzysztof Kamiński	Pabianice	35,75
Paweł Kubit	Kraków	35,69
Marcin Małogrosz	Warszawa	35,37

Przez kilka miesięcy nikt nie przekraczał bariery 44 p.; teraz – jednocześnie trzech uczestników, o bardzo zróżnicowanym stażu: Janusz Olszewski po raz dziewiętnasty; Tomasz Choczewski po raz pierwszy (witamy w K44!); Tomasz Wietecha po raz dwunasty (pamiętajmy wszak, że p. T.W. już 13 razy w fizyce. . .)

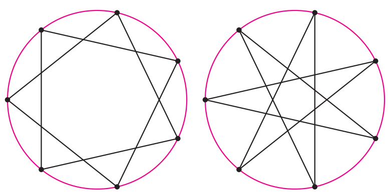
Skąd się wzięło siedem?

Począwszy od Pitagorasa wierzymy, że przyroda działa zgodnie z regułami matematyki. Wobec tego odszukajmy reguły, którymi kierował się siódmaczek (*Trientalis*) z naszych zagajników, wybierając siedmiokrotną symetrię swoich kwiatów.

Parkietaże płaszczyzny n-kątami foremnymi są możliwe tylko dla 3, 4 i 6. Krystalografia dopuszcza tylko krotność 2, 3 i 6. Siedmiokąta foremnego nie da się skonstruować cyrklem i linijką. Skąd więc 7?

Jedyne, co przychodzi do głowy, to n-kąty foremne gwiaździste. Ale dla $n = 7$ są takie dwa. Pojawia się więc pytanie, który z nich wybrało DNA siódmaczka.

Zagadka, zupełnie jak ze wzorami Ramanujana.



M. K.

n-kąt foremny gwiaździsty to wpisana w okrąg łamana dłuższa od okręgu, złożona z cięciw jednakowej długości. Jest ich $\varphi(n)/2 - 1$, gdzie φ to funkcja Eulera, której wartości to $n\Big(1 - \dfrac{1}{p_1}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(1 - \dfrac{1}{p_k}\Big)$, gdzie p_i to różne dzielniki pierwsze n.