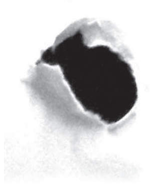
Kwazi-cząstki – model standardowy kwaziwszechświata

*Jacek SZCZYTKO**

*Inżynieria nanostruktur, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Żyjemy we Wszechświecie, w którym stałe fizyczne, kolejne generacje cząstek elementarnych, wartość ładunku elementarnego itp., są ściśle określone, przy czym w zasadzie nie wiemy, dlaczego przyjmują taką wartość, a nie inną. Najlepiej znany przykład to tzw. stała struktury subtelnej $\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137{,}036}$ bezwymiarowa wielkość charakteryzująca siłę oddziaływania elektromagnetycznego naładowanych cząstek. W każdym systemie jednostek jest taka sama, a jej niewielka zmiana (rzędu kilku procent) sprawiłaby, że reakcje jądrowe syntezy węgla (z trzech jąder He) i tlenu (z węgla i helu) by ustały, co, oczywiście, doprowadziłoby do braku pierwiastków, z których mogłaby się utworzyć materia organiczna – czyli my. Obserwacja ta stanowi sedno tzw. zasady antropicznej, która głosi, że stałe fizyczne naszego Wszechświata mają dokładnie takie wartości, aby mogło zaistnieć życie. W teorii wielu (wszech)światów oznacza to, że w Wielkim Wybuchu powstały, być może, i inne wszechświaty, z innymi stałymi fizycznymi i innymi wymiarami przestrzennymi, ale nie ma ich kto badać, gdyż tylko nasz ma parametry umożliwiające powstanie życia. A do innych wszechświatów nie mamy dostępu. Czyżby?



A gdybyśmy mieli możliwość zbadania wszechświata cząstek o ułamkowym ładunku elementarnym? Cząstek o ujemnej masie? Elektronów bezmasowych? Ciężkich fotonów? Monopoli magnetycznych? Egzotycznych cząstek niebędących ani fermionami, ani bozonami? Moglibyśmy testować prawa fizyki egzotycznych wszechświatów i obserwować zjawiska, które na co dzień nie występują w przyrodzie, np. całkiem bezpieczną anihilację dodatnich i ujemnych elektronów w trój- dwu- albo jednowymiarowej przestrzeni.

Może troszeczkę przesadziłem z tymi „innymi prawami fizyki” – tych nie zmienimy, ale możemy zmienić elementarne cząstki budujące nasz hipotetyczny wszechświat i zobaczyć, w jaki sposób mogą wchodzić w interakcje. Musimy zatem przejść do „innego wszechświata” – będzie nim kryształ. Zwykły kryształ – może być metal, półprzewodnik, izolator – byleby atomy układały się w periodyczną strukturę przestrzenną, byleby można było go jakoś pobudzić (światłem, temperaturą, napięciem, polem magnetycznym itp.) i byleby można to pobudzenie jakoś śledzić, badać. Kryształ niepobudzony będziemy traktowali jak próżnię, a elementarne wzbudzenia takiego kryształu będą naszymi cząstkami elementarnymi, które będą wchodziły w interakcje i które pozwolą na testowanie zwariowanych teorii fizycznych. Oczywiście, nie są to prawdziwe cząstki elementarne (choć wolałbym się nie wdawać w dyskusję znaczenia słowa „prawdziwy”), tylko jakby-cząstki, więc mówimy o nich kwazi-cząstki. Ich właściwości będą zależały od wielu rzeczy, ale przede wszystkim od rodzaju materiału, który badamy i od jego wymiarowości. Tak, możemy badać kwazi-wszechświaty trójwymiarowe, jak nasz, ale i dwu-, jedno- i zerowymiarowe.

Weźmy, na przykład, elektron w krysztale krzemu. Każdy atom krzemu ma czterech sąsiadów, z którymi uwspólnia elektrony walencyjne, tworząc kowalencyjne wiązania chemiczne zgodnie z regułą oktetu. Taki kryształ – w którym elektrony obsadzają dozwolone stany i wypełniają wszystkie miejsca na powłoce walencyjnej – jest właśnie naszą kwazi-próżnią. Ale krzem, jako pierwiastek chemiczny, ma więcej „miejsc” na swoje elektrony – chodzi o stany wzbudzone, normalnie puste (czyli nieobsadzone elektronami), ale które pod wpływem jakiegoś zaburzenia mogą zostać przez chwilę obsadzone. Astronomowie używają takich stanów wzbudzonych np. do badania, czy w danej gwieździe są „linie widmowe krzemu” – te linie widmowe są właśnie efektem przechodzenia elektronów pomiędzy różnymi powłokami atomu krzemu. Okazuje się, że w krysztale te puste powłoki też tworzą miejsce dla wzbudzonych elektronów. W odróżnieniu od pojedynczego atomu kryształ ma tych miejsc bardzo dużo, tak, że nie mówimy już o „poziomach”, ale o „pasmach”. I tu niespodzianka – elektron, który zostanie przeniesiony do takiego pustego pasma (zwanego pasmem przewodnictwa) z pasma zapełnionego, w którym tworzył wiązania (zwanego pasmem walencyjnym), porusza się w krysztale krzemu tak, jakby kryształu nie było! Jakby nie było 10^{22} w cm^3 atomów, z którymi

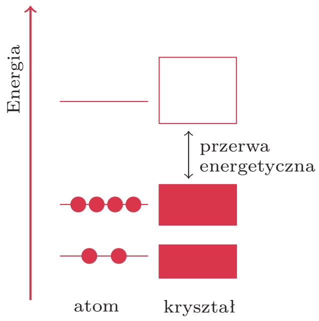
Rozwiązanie zadania M 1582.
Na „tak”: gdy n jest nieparzyste, $a^n + b^n$ dzieli się przez $a + b$, i wystarczy zauważyć, że
$3^{105} + 4^{105} = (3^3)^{35} + (4^3)^{35} =$
$= (3^5)^{21} + (4^5)^{21} = (3^7)^{15} + (4^7)^{15}$,
a więc $3^{105} + 4^{105}$ dzieli się
przez $3^3 + 4^3 = 91 = 7 \cdot 13$,
przez $3^5 + 4^5 = 1267 = 7 \cdot 181$
oraz przez $3^7 + 4^7 = 18751 = 49 \cdot 379$.

Na „nie”: liczba ta zarówno modulo 5, jak modulo 11 przystaje do 2.

Zauważmy bowiem, że
$4^3 \equiv -1 \pmod 5$ i $3^2 \equiv -1 \pmod 5$,
podobnie
$4^3 \equiv -2 \pmod{11}$ i $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$).

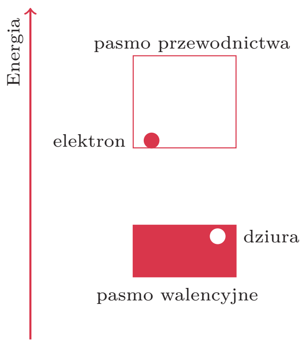
Skoro $4^3 \equiv -1 \pmod 5$, to
$4^{105} \equiv (-1)^{35} \pmod 5 \equiv -1 \pmod 5$;
podobnie z $3^2 \equiv -1 \pmod 5$ wynika
$3^{104} \equiv (-1)^{52} \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$,
a więc $3^{105} \equiv 3 \pmod 5$, skąd
$(3^{105} + 4^{105}) \equiv (3 - 1) \pmod 5 = 2 \pmod 5$.

Analogicznie, skoro $4^3 \equiv -2 \pmod{11}$,
więc $4^{15} \equiv (-2)^5 \pmod{11} =$
$= -32 \pmod{11} \equiv 1 \pmod{11}$,
stąd $4^{105} \equiv 1^7 \pmod{11} = 1 \pmod{11}$;
podobnie z $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$ mamy
$3^{105} \equiv 1^{21} \pmod{11} = 1 \pmod{11}$;
wobec tego $(3^{105} + 4^{105}) \equiv$
$\equiv (1 + 1) \pmod{11} = 2 \pmod{11}$.



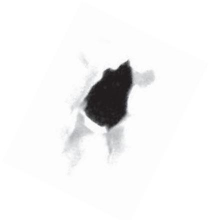
mógłby się zderzać, nie było 10^{22} w cm^3 innych elektronów, na które mógłby wpadać – nic, próżnia, elektron swobodny!

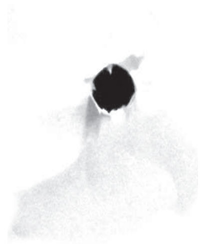
Elektron zachowuje się jak fala materii (fala de Broglie'a) i okazuje się, że ośrodek periodyczny, jakim jest kryształ, tylko w niewielkim stopniu modyfikuje jego właściwości w porównaniu z elektronem swobodnym. Elektrony o różnej energii mają różną długość fali i w zasadzie największy wpływ sieć krystaliczna ma na elektrony, których długość fali jest wielokrotnością odległości pomiędzy atomami. Niemniej nawet te elektrony w krysztale możemy traktować jak cząstki swobodne, poruszające się bez rozproszeń. Elektron w paśmie przewodnictwa jest właśnie „elementarnym wzbudzeniem" kryształu. Jaką cenę musimy zapłacić za taki prosty model? Po pierwsze, nasz elektron ma inną masę niż elektron swobodny (oznaczmy tę masę m_0): w zależności od materiału może to być masa $1000m_0$ albo i $0{,}001m_0$ a czasami nawet 0 (grafen!). W przypadku krzemu jest to około $0{,}2m_0$. Po drugie, jeśli został wzbudzony z pasma walencyjnego, to po pewnym czasie do niego powróci – emitując nadmiar energii, np. w postaci fotonu albo jeszcze fononu (o fononach za chwilę). Czyli zanihiluje – wyemituje jakoś swoją energię i po procesie anihilacji pozostanie znowu „kwazi-próżnia", czyli pusty kryształ. OK, to z czym on zanihiluje, co to za „antycząstka", która pożarła nasz elektron? To jest anty-elektron, czyli tzw. „pusty" stan, opuszczony na chwilę przez elektron. Jeśli puste pasmo porównać do pustej butelki, a elektron do kropli wody, to pełne pasmo możemy utożsamić z butelką napełnioną po korek, z której „odlano" kropelkę, taki kwazi-bąbelek. Otóż ten pusty stan – który nazywa się dziura – także może swobodnie po krysztale podróżować. Tyle tylko, że tak jak bąbelek w butelce, zachowuje się odwrotnie niż pozostałe elektrony-kropelki. Jak włączymy pole elektryczne, to elektron poleci w stronę ładunku dodatniego, a dziura – w kierunku ujemnego (bo wszystkie elektrony z pasma walencyjnego poleciały w stronę dodatniego – to jak przechylanie butelki z bąbelkiem). Dziura więc jest kwazi-cząstką o dodatnim ładunku elektrycznym. Wszystko się zgadza – ujemny elektron, anihilując z dodatnią dziurą, pozostawia pusty, nienaładowany kryształ. Ale zaraz – jeśli w naszym kwazi-wszechświecie pojawił się ładunek dodatni i ujemny, to może powstanie i kwazi-wodór, składający się z dwóch ładunków? I rzeczywiście – elektrony i dziury tworzą takie stany związane – nazywają się one ekscytonami (kolejna kwazi-cząstka!). Przypominają nie tyle wodór, co pozytonium – układ elektronu i pozytonu, który po pewnym czasie może zanihilować. Ale ekscytony mogą tworzyć podstawę naszego kwazi-układu okresowego: mogą tworzyć cząsteczkę bi-ekscytonu (dwa ekscytony), zjonizowanego ekscytonu (tzw. trionu) itd. Taki ekscyton można w pewnych warunkach silnie sprząc ze światłem, tworząc tzw. polaryton – stan mieszany fotonu i ekscytonu, który w odpowiednio dużej koncentracji polarytonów z kolei może przejść do fazy kondensatu Bosego–Einsteina… Ufff. Ważne jest to, że to działa, że możemy budować z kwazi-cząstek elementarnych, takich jak elektron i dziura, coraz bardziej skomplikowane obiekty.



Niektóre egzotyczne stany materii wynikają np. z obecności elektronów o zerowej masie – takiego elektronu w krysztale nie da się zatrzymać, musi poruszać się z „prędkością światła dla elektronu" (dziwnie brzmi) – w grafenie jest ona tylko 300 razy mniejsza od prędkości światła. I znowu – możemy na stole laboratoryjnym testować ultrarelatywistyczną fizykę, wyrafinowane teorie fermionów Majorany – wszystko dzięki kwazi-cząstkom.

Sam kryształ – rozumiany jako sieć atomów – też nie jest tylko biernym ośrodkiem. W krysztale możemy wzbudzić atomy do drgań – wystarczy podnieść temperaturę. Znowu – elementarne wzbudzenie możemy traktować jak kwazi-cząstkę, która będzie mogła się poruszać po krysztale. Taka cząstka to fonon – może oddziaływać z elektronami, dziurami, podgrzewać ekscytony albo pomagać im osiągnąć równowagę termodynamiczną. Jest analogiem „nośnika oddziaływania", kwazi-bozonem. Dodatkowo innego rodzaju wzbudzenia – magnetyczne, pomiędzy zlokalizowanymi momentami magnetycznymi w atomach tworzących kryształ, mogą być źródłem magnonów (fal spinowych), skyrmionów, a nawet monopoli magnetycznych! Budując kryształy z kryształów – tzw. struktury fotoniczne – możemy badać ciężkie fotony, czyli światło, które ma masę i da się nawet na chwilę „zatrzymać".





Warto na koniec dodać, że charakter kwazi-cząstek można kontrolować przez zmianę wymiaru przestrzeni, w której je badamy. Jeśli zmusimy elektrony i dziury do ruchu tylko w jednej płaszczyźnie, np. wytwarzając bardzo cienką, kilkunanometrową warstwę kryształu, wtedy mamy do czynienia z kwazi-wszechświatem dwuwymiarowym (tzw. studnią kwantową), jeśli tę warstwę pokroimy jak makaron, dostaniemy obiekty jednowymiarowe (druty kwantowe), a jak dalej posiekamy ten makaron na drobne kawałeczki, dostaniemy kropki kwantowe – obiekty zerowymiarowe (kwazi-zerowymiarowe), które można traktować jak sztuczne atomy. Zastosowania? Np. lasery półprzewodnikowe to studnie kwantowe, w których dokonujemy skuteczniej anihilacji elektronów i dziur; kropki kwantowe były niedawno hitem nowoczesnych luminoforów w telewizorach.

Nasze możliwości są w zasadzie nieograniczone. Badaniami tego typu zjawisk zajmuje się fizyka ciała stałego i nanotechnologia, zastosowania sięgają urządzeń półprzewodnikowych, optycznych, przetwarzania informacji – także kwantowej, bo komputery kwantowe też można zaprojektować z kwazi-cząstek. Badania trwają, przecież jest tyle kwazi-wszechświatów do odkrycia!

Jak proste problemy stały się trudne

*Michał WŁODARCZYK**

* doktorant, Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Dawno, dawno temu, wierzono, że fundamentalne zasady rządzące światem są proste. Kiedy dziedzina nauki, zwana obecnie informatyką, dopiero raczkowała, naukowcy byli przekonani, że dla każdego problemu obliczeniowego można znaleźć efektywny algorytm, o ile poświęci się na to wystarczająco dużo czasu, kredy oraz kawy. Pojęcie „efektywnego algorytmu” oznaczało początkowo algorytm o czasie działania proporcjonalnym do rozmiaru danych wejściowych, ale i algorytmy o złożoności obliczeniowej $\mathcal{O}(n^2)$ czy $\mathcal{O}(n^3)$ były do zaakceptowania.

Pojawiły się jednak problemy, których pomimo wielu lat badań i hektolitrów wypitej kawy nikt nie umiał rozwiązać lepiej, niż generując wszystkie potencjalne rozwiązania i wybierając najlepsze z nich. Czas działania takich algorytmów jest zazwyczaj wykładniczy, zatem dla dużych danych działają one zdecydowanie wolniej niż te o złożoności wielomianowej. Do trudnych problemów należały:

- Pokrycie Wierzchołkowe: mając dany graf, znajdź najmniejszy podzbiór wierzchołków, stykający się z każdą krawędzią.
- Cykl Hamiltona: mając dany graf, rozstrzygnij, czy istnieje cykl odwiedzający każdy wierzchołek dokładnie raz.
- Spełnialność Formuł (SAT): mając daną formułę logiczną, złożoną ze zmiennych przyjmujących wartości prawda/fałsz oraz operatorów AND, OR, NOT, rozstrzygnij, czy można przypisać zmiennym takie wartości, aby formuła była prawdziwa.

Naukowcy zaczęli rozumieć to zjawisko lepiej na początku lat 70. Choć nie udało się efektywnie rozwiązać ani jednego z „trudnych” problemów, ani też wykluczyć istnienia algorytmów wielomianowych, udowodniono, że prawie wszystkie znane trudne problemy są równoważne na mocy wielomianowych redukcji pomiędzy nimi. Powstała teoria NP-trudności wyjaśniała, że efektywne rozwiązanie dowolnego z nich pociąga istnienie szybkich algorytmów dla pozostałych. Zamiast zastanawiać się nad setkami różnych problemów niezależnie, naukowcy zrozumieli, że „jądro” trudności jest takie samo. Choć dalej nie wiemy, czy da się je rozwiązać wielomianowo, całe zagadnienie sprowadza się do jednego kluczowego pytania: „czy P $\neq$ NP?”. Świat znów stał się prosty.

Co prawda, istnieje kilka problemów, o których do dziś nie wiemy, ani że są rozwiązywalne wielomianowo, ani że są NP-trudne, ale są to „niedobitki”.

Teoria NP-trudności okazuje się jednak czasem zbyt „grubo ciosana”, chociażby dla uczestników Olimpiady Informatycznej. Powiedzmy, że na zawodach pojawia się zadanie „rozstrzygnij, czy w danym zbiorze liczb naturalnych istnieją takie a, b, c, że $a + b = c$”. Najprostszy algorytm przegląda wszystkie trójki liczb i działa w czasie $\mathcal{O}(n^3)$. Znajomość podstawowych struktur danych pozwala na poprawę czasu działania do $\mathcal{O}(n^2 \log(n))$. Ale czy da się poprawiać dalej, np. do $\mathcal{O}(n \log(n))$? Inny problem: „mając dane dwa ciągi liczb, znajdź ich najdłuższy