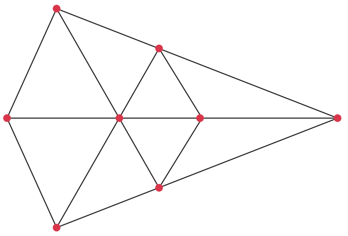
deltoid 118

Z drugiej strony…

Joanna JASZUŃSKA

Na wiele problemów matematycznych warto spojrzeć z innej strony (lub z dwóch stron jednocześnie), przeanalizować dualną sytuację, dostrzec alternatywną wersję tego samego zagadnienia…

1. Planszą do gry w *Jam* jest mapa pewnego kraju, w którym jest 8 miast i 9 prostych dróg przez nie, jak na rysunku 1. Dwaj gracze na przemian malują, każdy swoim kolorem, po jednej całej drodze. Wygrywa ten, kto pierwszy pomaluje swoim kolorem wszystkie drogi przez któreś miasto. Jak grać, żeby wygrać?



Rys. 1. Za pojedynczą drogę uważamy całą prostą, np. droga pozioma łączy cztery miasta.

2. Jak wygrać (lub zremisować) w szachy z arcymistrzem, nawet nie umiejąc grać?

3. Znajdź dowolną trójkę dodatnich liczb całkowitych x, y, z spełniających równanie $\dfrac{29x + 30y + 31z}{3} = 122.$

4. Czy istnieją takie liczby niewymierne a, b, dla których liczba a^b jest wymierna?

5. Przyklejamy do stołu monetę 1 zł i kładziemy nad nią, styczną do niej, drugą monetę 1 zł, z orłem ustawionym jak na rysunku 2. Następnie tę drugą monetę toczymy wokół przyklejonej. Jak ustawiony będzie orzeł, gdy toczona moneta znajdzie się na dole monety nieruchomej?

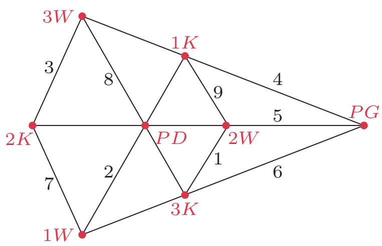
Rys. 2. Warto wymyślić rozwiązanie, a następnie sprawdzić, używając monet.

6. Jeśli szerokość pewnego prostokąta powiększyć o 50%, to jego szerokość powiększy się o 25%. O ile procent zmniejszy się długość tego prostokąta, jeśli jego długość zmniejszymy o 50%?

Rozwiązania

R1. Tak samo, jak w „kółko i krzyżyk”. Miasta odpowiadają kolumnom, wierszom i przekątnym planszy, drogi zaś – jej dziewięciu polom (rys. 3). $\square$

2	7	6
9	5	1
4	3	8



Rys. 3. Numeracja pól planszy do gry w „kółko i krzyżyk” oraz odpowiadające im drogi w grze *Jam*. Nazwy miast $1K$, $2W$ itd. oznaczają 1 kolumnę, 2 wiersz itd. planszy, PG to przekątna w prawo w górę, PD – w prawo w dół.

Dwie inne zakamuflowane gry w „kółko i krzyżyk” opisano w *deltoidach* 7/2010 i 8/2012.

R2. Zagrajmy jednocześnie z dwoma arcymistrzami: A i B. Pierwszą partię niech zaczyna A, grając białymi. Po jego pierwszym ruchu przerwijmy na chwilę grę z nim i rozpocznijmy drugą partię, z B, dokładnie tym samym ruchem, który A wykonał w pierwszej grze. Gracz B jakoś na ten ruch odpowie czarnymi. Wtedy wróćmy do przerwanej rozgrywki z A i powtórzmy w niej ten właśnie ruch czarnymi. I tak dalej, ruchy białymi gracza A z pierwszej gry kopiujmy w grze drugiej, a ruchy B czarnymi z drugiej gry kopiujmy w grze pierwszej. W ten sposób dokładnie jedną z tych dwóch gier wygramy, czyli pokonamy arcymistrza szachowego (ewentualnie z obydwoma arcymistrzami zremisujemy – to też sukces!). $\square$

R3. Równanie spełniają np. $x = 1$, $y = 4$, $z = 7$, bo w roku przestępnym jest jeden miesiąc 29-dniowy, cztery 30-dniowe i siedem 31-dniowych – łącznie 366 dni. $\square$

R4. Tak, istnieją. Rozważmy liczbę $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

Jeśli jest ona wymierna, to żądana własność zachodzi dla liczb $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$.

W przeciwnym przypadku warunki zadania spełniają liczby niewymierne $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$, wtedy bowiem $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2.$ $\square$

Zainteresowanym ujawniamy, że liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest niewymierna, a nawet przestępna.

R5. Monety są identyczne, zatem gdy ich punkt styczności pokona połowę obwodu monety przyklejonej i będzie na dole, to pokona również połowę obwodu monety toczonej i będzie przy głowie orła. Orzeł na dole będzie więc znów – tak jak na początku – ustawiony głową do góry. $\square$

R6. Rozważmy prostokąt o wymiarach 4×5. Jeśli jego szerokość 4 powiększyć o 50%, uzyskamy prostokąt o bokach 6×5, a więc o szerokości 5, czyli o 25% większej niż początkowa. Jeśli zaś długość 5 wyjściowego prostokąta zmniejszyć o 50%, otrzymamy prostokąt rozmiaru $4 \times 2{,}5$, a więc o długości 4, czyli o 20% mniejszej niż pierwotna.

Z założeń zadania wynika, że szerokość rozważanego prostokąta powiększona o 25% równa jest jego pierwotnej długości. Stąd prostokąt ten ma proporcje $4 : 5$, zatem uzyskana powyżej odpowiedź 20% jest jedyną możliwą. $\square$