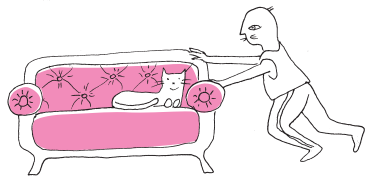
Nieuchwytny punkt stały

*Jarosław GÓRNICKI**

* Politechnika Rzeszowska

Jeżeli $I = [a, b]$ jest domkniętym, ograniczonym przedziałem prostej euklidesowej $\mathbb{R}$, to *każde przekształcenie ciągłe $f : I \to I$ ma punkt stały*, tj. taki punkt $p \in I$, że $f(p) = p$.

Istotnie, rozważmy funkcję $g : I \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $g(x) = f(x) - x$ dla każdego $x \in I$. Ponieważ $g(a) \geqslant 0$ i $g(b) \leqslant 0$, więc z twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich istnieje punkt $p \in I$, dla którego $g(p) = 0$, czyli $f(p) = p$.



Można też rozumować inaczej: niech $f : I \to I$ będzie przekształceniem ciągłym,

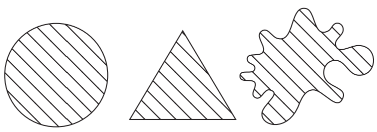
$$A = \{x \in I : x \leqslant f(x)\} \quad \text{i} \quad B = \{x \in I : x \geqslant f(x)\}.$$

Oczywiście, $I = A \cup B$, A, B są zbiorami domkniętymi w I, $a \in A$, $b \in B$. Ponieważ I jest zbiorem spójnym, więc istnieje punkt $p \in A \cap B$. Wtedy $f(p) = p$.

Świetnie, ale gdzie (jak) tego punktu p szukać? To jest problem!

W 1912 roku Luitzen Brouwer opublikował niezwykle zaskakujący wynik: *na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$ każde przekształcenie ciągłe koła domkniętego $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ w siebie ma punkt stały.* Uzasadnienie tego rezultatu nie jest łatwe, intuicja nam w tym nie pomaga. Weźmy papierową kopię koła B, zgniećmy ją dowolnie (ale jej nie rozerwijmy), to, co otrzymaliśmy, zdepczmy tak, by stało się częścią koła B. Wtedy co najmniej jeden punkt kopii będzie leżał dokładnie nad swoim pierwowzorem. Zadziwiające!

I w tym przypadku nie mamy żadnych precyzyjnych informacji o ilości punktów stałych i ich lokalizacji (aproksymacji).



Rys. 1. Zbiory homeomorficzne, dyski topologiczne

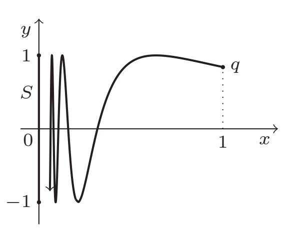
Odkryta przez Brouwera własność koła pozostaje prawdziwa dla szerszej klasy zbiorów. Mówimy, że dwa zbiory X i Y są *homeomorficzne*, jeśli istnieje takie wzajemnie jednoznaczne przekształcenie h zbioru X na zbiór Y, że przekształcenia h i h^{-1}, do niego odwrotne, są ciągłe. Takie przekształcenie h nazywamy *homeomorfizmem*. Zbiór homeomorficzny z kołem B nazywamy *dyskiem topologicznym* (rys. 1).

Mówimy, że zbiór X ma *własność punktu stałego*, gdy każde przekształcenie ciągłe $f : X \to X$ ma punkt stały.

Twierdzenie 1. *Niech X i Y będą zbiorami homeomorficznymi. Jeżeli zbiór X ma własność punktu stałego, to zbiór Y też ma własność punktu stałego.*

Istotnie, niech $g : Y \to Y$ będzie przekształceniem ciągłym. Określamy przekształcenie ciągłe $f = h^{-1} \circ g \circ h : X \to X$, czyli $f(x) = h^{-1}(g(h(x)))$ dla każdego $x \in X$. Ponieważ zbiór X ma własność punktu stałego, więc istnieje $p \in X$, że $f(p) = p$. Wtedy $h^{-1}(g(h(p))) = p$, więc $g(h(p)) = h(p)$. Oznacza to, że $h(p) \in Y$ jest punktem stałym przekształcenia g. Zbiór Y ma więc własność punktu stałego.

Twierdzenie Brouwera zapewnia więc, że *na płaszczyźnie euklidesowej dysk topologiczny ma własność punktu stałego.* Dyski topologiczne należą do szerszej klasy zbiorów, tzw. *continuów.* Continuum to zbiór zwarty i spójny.

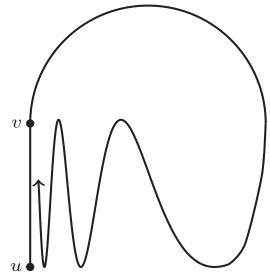


Rys. 2

Nie wszystkie continua (na płaszczyźnie euklidesowej) mają własność punktu stałego. Dla okręgu, czy pierścienia niewielki obrót lub przekształcenie antypodyczne rusza wszystkie punkty figury. Z drugiej strony wiele continuów ma własność punktu stałego.

Przykład 1. *Łuk* $\sin\frac{1}{x}$, czyli wykres funkcji $\sin\frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$, w sumie z odcinkiem $S = \{(x, y) : x = 0 \wedge |y| \leqslant 1\}$ (rys. 2) ma własność punktu stałego.

Oznaczmy łuk $\sin\frac{1}{x}$ przez A. Niech $\xi(a)$ oznacza współrzędną x-ową punktu $a \in A$. Dla dowolnego przekształcenia ciągłego $f : A \to A$ funkcja $g : A \to \mathbb{R}$ dana wzorem $g(a) = \xi(a) - \xi(f(a))$ jest ciągła i nieujemna w punkcie $q = (1, \sin 1)$. Na odcinku S funkcja g jest niedodatnia. Jeżeli funkcja g przyjmuje wartość zero w pewnym punkcie zbioru $A \setminus S$, to jest to punkt stały przekształcenia f. Jeśli $g(a) > 0$ we wszystkich punktach $a \in A \setminus S$, to $g(a) = 0$ na zbiorze S. Oznacza to jednak, że f przekształca zbiór S w S, a takie przekształcenie ma punkt stały w zbiorze S.



Rys. 3. Okrąg $\sin\frac{1}{x}$

Przykład 2. Okrąg $\sin\frac{1}{x}$ (rys. 3) ma własność punktu stałego.

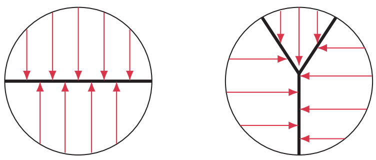
Oznaczmy okrąg $\sin\frac{1}{x}$ przez W. Niech $u = (0, -1)$ i dla każdego punktu $a \in W$ niech $\lambda(a)$ będzie długością łuku, wzdłuż okręgu W, od punktu u do punktu a (np. $\lambda(u) = 0$, $\lambda(v) = 2$). Dla dowolnego przekształcenia ciągłego $f : W \to W$ funkcja $g : W \to \mathbb{R}$ dana wzorem $g(a) = \lambda(a) - \lambda(f(a))$ jest ciągła oraz $g(u) \leqslant 0$. Jeśli w zbiorze W jest punkt, dla którego funkcja g jest nieujemna, to w pewnym punkcie $p \in W$, $g(p) = 0$. Wtedy $f(p) = p$.

Warunek $g(a) < 0$ dla każdego punktu $a \in W$ oznacza, że punkt $f(a)$ znajduje się na wykresie funkcji $\sin\frac{1}{x}$ zawsze przed punktem a (w tym sensie, że a jest punktem łuku łączącego u i $f(a)$). Każdy punkt $q \in S$ jest granicą ciągu punktów $q_1, q_2, \ldots$ z wykresu funkcji $\sin\frac{1}{x}$. Ponieważ punkt $f(q_i)$ leży przed punktem q_i na wykresie funkcji $\sin\frac{1}{x}$, więc z ciągłości przekształcenia f, $f(q) \in S$. Oznacza to, że $f : S \to S$, w konsekwencji f ma punkt stały w zbiorze S.

W badaniu własności punktu stałego bardzo użyteczny jest następujący rezultat.

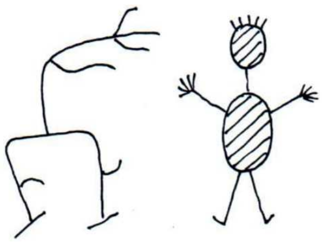
Twierdzenie 2. *Niech X będzie zbiorem z własnością punktu stałego, Y jego podzbiorem i $r : X \to Y$ takim przekształceniem ciągłym, że $r(y) = y$ dla każdego $y \in Y$. Wtedy zbiór Y też ma własność punktu stałego.*

Uzasadnienie jest proste. Niech $g : Y \to Y$ będzie przekształceniem ciągłym. Wtedy przekształcenie $f = g \circ r : X \to Y \subset X$ jest ciągłe. Ponieważ zbiór X ma własność punktu stałego, więc istnieje takie $p \in X$, że $f(p) = g(r(p)) = p$. Ponieważ $p \in Y$, więc z warunku $r(p) = p$ wynika, że $g(p) = p$.

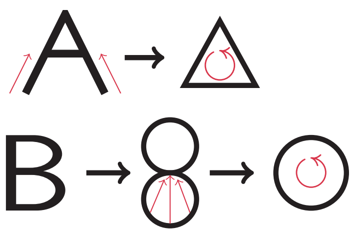

Rys. 4

Zbiór $Y \subset X$, dla którego istnieje takie przekształcenie ciągłe $r : X \to Y$, że $r(y) = y$ dla każdego $y \in Y$, nazywamy *retraktem* zbioru X, a przekształcenie r nazywamy *retrakcją*. Pojęcia te wprowadził w 1931 roku Karol Borsuk.

Odcinek i litera Y są retraktami koła B, więc mają własność punktu stałego (rys. 4). Continua z rysunku 5 też są retraktami koła B i zgodnie z twierdzeniem 2 mają własność punktu stałego.


Rys. 5

Oczywiście, aby wykazać, że zbiór nie ma własności punktu stałego, wystarczy wskazać przykład jednego przekształcenia ciągłego, które rusza wszystkie punkty zbioru (lub jego retraktu). Sprawdź, które litery alfabetu łacińskiego mają własność punktu stałego (a innych alfabetów?). Dla przykładu rozpatrzmy pierwsze dwie litery (rys. 6), jak widać, obie nie mają własności punktu stałego.



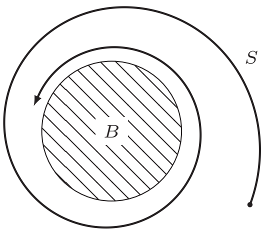
Rys. 6

Drogi Czytelniku, w poniższych zadaniach, zanim przeczytasz rozwiązania, sam zmierz się z pytaniami.

Zadanie 1. Czy „bałwanek", gdzie koła domknięte X i Y są styczne zewnętrznie, ma własność punktu stałego?

Rozwiązanie: Wystarczy zauważyć, że „bałwanek" jest retraktem koła, które zgodnie z twierdzeniem Brouwera ma własność punktu stałego. Wniosek: „bałwanek" $X \cup Y$ ma własność punktu stałego.

A jak wygląda sytuacja, gdy zbiory X i Y są dyskami topologicznymi i mają więcej punktów wspólnych?



Rys. 7.

Zadanie 2. Czy koło domknięte B z nawijającą się asymptotycznie na jego brzeg spiralą $S = \{\frac{t+1}{t}(\cos t, \sin t) : t \geqslant 1\}$ (rys. 7) ma własność punktu stałego?

Rozwiązanie: Jeżeli $f : B \cup S \to B \cup S$ jest przekształceniem ciągłym, to albo $f(B) \subset B$, albo $f(B) \subset S$ (zbiór $B \cup S$ nie jest łukowo spójny, a jedynie jest sumą zbiorów łukowo spójnych). Analogicznie, $f(S) \subset B$ albo $f(S) \subset S$.

Jeżeli $f(B) \subset B$, to na podstawie twierdzenia Brouwera f ma punkt stały.

Jeżeli $f(B) \subset S$, to również $f(B \cup S) \subset S$ ($f(S)$ nie może wtedy zawierać się w zbiorze B, bo f jest ciągłe). Ponieważ zbiór $B \cup S$ jest zwarty, więc zbiór $f(B \cup S) \subset S$ jest punktem albo domkniętym łukiem skończonej długości $J \subset S$. Jeżeli $f(B \cup S)$ jest punktem, to jest to punkt stały przekształcenia f. W przeciwnym przypadku $f : J \to J$, a to przekształcenie ma punkt stały. Zatem continuum $B \cup S$ ma własność punktu stałego.

Opisane zagadnienia prowadzą do wielu otwartych pytań. Jedno z najważniejszych, postawione około 1930 r., jest następujące:

Problem. *Czy każde continuum, które nie rozcina płaszczyzny, ma własność punktu stałego?*

Niestety, nie znamy na nie odpowiedzi. Jednym z powodów takiego stanu rzeczy jest niezwykle bogaty i różnorodny ogród anomalii jaki stanowią continua. Przykładem niech będzie pytanie: czy na płaszczyźnie istnieją linie będące wspólnym brzegiem trzech (lub więcej) obszarów? Odpowiedź podał Brouwer w 1910 roku, budując na płaszczyźnie dla każdego naturalnego $n \geqslant 3$ wspólne brzegi n obszarów. Spróbuj i Ty!

O egzotycznych kontinuach pisał w Δ^3_{81} Jerzy Mioduszewski: *Z geometrii głębokiego interioru: kontinua nierozkładalne.*

Anomalie kul i kostek

*Karol GRYSZKA**

* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Kwadrat i koło mają swoje naturalne odpowiedniki trójwymiarowe (sześcian i kula), czterowymiarowe, pięciowymiarowe i dowolnie wymiarowe. Pisząc „dowolny wymiar", mamy na myśli więcej osi układu, czyli też współrzędnych opisujących obiekt. Wyobraźmy sobie mianowicie przestrzeń trójwymiarową (co nie jest specjalnie trudne). Każdy punkt takiej przestrzeni można opisać za pomocą zestawu trzech współrzędnych (x, y, z). Gdy opisujemy położenie punktu na płaszczyźnie, myślimy zwykle o układzie kartezjańskim i parze współrzędnych (x, y). Opisując punkt na prostej, używamy tylko jednej liczby. Gdy zaś chcemy opisać przestrzeń czterowymiarową, lub ogólniej n-wymiarową, używamy zestawu n liczb $(x_1, \ldots, x_n)$.

Potrzeba używania więcej niż trzech współrzędnych nie jest specjalnie wydumana. Wyobraźmy sobie, że chcemy opisać temperaturę w pomieszczeniu. Chcąc być absolutnie precyzyjnym, powinniśmy wskazać, jaka temperatura panuje w każdym jego punkcie (inna będzie nad kaloryferem, a inna w rogu pokoju). Czyli mamy (x_1, x_2, x_3, T), gdzie pierwsze trzy liczby to współrzędne punktu, a czwarta to temperatura. Chcąc opisać temperaturę w pomieszczeniu w ciągu np. tygodnia, posłużymy się pięcioma współrzędnymi (x_1, x_2, x_3, T, t), gdzie ostatnia wskazuje czas dokonywania pomiaru temperatury.

I choć opis takich wielowymiarowych przestrzeni nie sprawia żadnej trudności od strony formalnej, to nie można „zobaczyć" przestrzeni czterowymiarowej (i żadnej wyżej wymiarowej), gdyż nie mają one naturalnego odpowiednika.

Stosunkowo łatwo jest skonstruować odpowiednie rzuty obiektów czterowymiarowych w przestrzeń trójwymiarową. Analogią takiej idei jest rysowanie rzutu sześcianu na płaskiej kartce papieru.

Wróćmy na chwilę do niższych wymiarów – drugiego i trzeciego. Wspomniane na początku koło i kula są właściwie tym samym, tylko w różnych przestrzeniach: są to zbiory wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od ustalonego środka jest nie większa od promienia R. Takie pojęcie możemy przenieść na dowolny wymiar. *Kulą n-wymiarową o środku w punkcie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i promieniu R* nazywamy zbiór

$$B^n(a, R) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid d(x, a) \leqslant R\},$$

Odległość punktu $x = (x_1, \ldots, x_n)$ od $y = (y_1, \ldots, y_n)$ w przestrzeni n-wymiarowej to liczba

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

Wzór ten jest konsekwencją twierdzenia Pitagorasa.

gdzie $d(x, a)$ to odległość od a do x. Z kulą wiążemy w sposób naturalny *sferę*, która jest zbiorem punktów odległych od danego punktu dokładnie o R

$$S^{n-1}(a, R) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid d(x, a) = R\}.$$

Zwróćmy uwagę na wskaźnik $n - 1$; mimo iż sfera jest opisana w przestrzeni n-wymiarowej, jest obiektem $n - 1$ wymiarowym – jedna ze współrzędnych zawsze daje się wyrazić jako funkcja promienia i pozostałych $n - 1$ współrzędnych.

Jeśli okrąg opisany jest równaniem $x^2 + y^2 = 1$, to znając x, wiemy, że $y = \sqrt{1 - x^2}$ lub $y = -\sqrt{1 - x^2}$.