Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

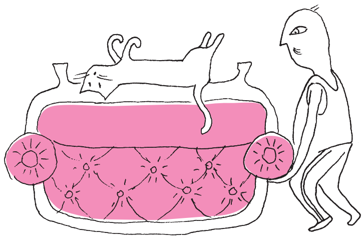
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2018

Zadania z matematyki nr 767, 768

Redaguje Marcin E. KUCZMA



767. Kwadrat o boku długości n, będącej liczbą naturalną, został podzielony prostymi poziomymi i pionowymi na n^2 kwadracików jednostkowych. Powstała siatka, utworzona z $2n(n+1)$ odcinków jednostkowych (boków tych kwadracików). Używając czterech barw, należy te odcinki pokolorować (każdy odcinek jednym kolorem) tak, żeby każdy kwadracik jednostkowy miał boki różnych kolorów oraz by każdy bok dużego kwadratu uzyskał jednolity kolor – ale każdy inny. Dla jakich liczb naturalnych $n \geqslant 1$ jest to wykonalne?

768. Znaleźć wszystkie trójki liczb naturalnych $k, m, x \geqslant 1$, spełniające równanie
$$1 + x + x^2 + \ldots + x^k = (1+x)^m.$$
Zadanie 768 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2018

Przypominamy treść zadań:

763. Dany jest wielomian $P(x)$ stopnia 2, o współczynnikach rzeczywistych, oraz liczba naturalna $n \geqslant 1$. Udowodnić, że może istnieć co najwyżej jeden wielomian $Q(x)$ stopnia n, spełniający równanie $P(Q(x)) = Q(P(x))$ dla $x \in \mathbb{R}$.

764. Czy istnieją liczby naturalne $a, b \geqslant 1$, względnie pierwsze i takie, że wzór rekurencyjny
$$x_1 = a, \qquad x_{n+1} = b + \prod_{k=1}^{n} x_k$$
generuje ciąg $x_1, x_2, x_3, \ldots$, którego wszystkie wyrazy są liczbami złożonymi?

763. Niech $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Przypuśćmy, że dla ustalonej liczby $n \geqslant 1$ istnieją dwa różne wielomiany Q_1, Q_2 stopnia n, spełniające podane równanie. Oznaczmy ich współczynniki wiodące przez A_1, A_2 (więc $Q_i(x) = A_i x^n + \ldots$); $A_1, A_2 \neq 0$. Przyrównując współczynniki wiodące po obu stronach równania $P(Q_i(x)) = Q_i(P(x))$, widzimy, że $aA_i^2 = A_i a^n$ (dla $i = 1, 2$). Zatem $A_1 = a^{n-1} = A_2$. Stąd wynika, że różnica $R(x) = Q_1(x) - Q_2(x)$ jest niezerowym wielomianem stopnia $m < n$.

Odejmujemy stronami równania $Q_i(P(x)) = P(Q_i(x))$ (dla $i = 1, 2$) i przekształcamy uzyskaną równość:
$$Q_1\big(P(x)\big) - Q_2\big(P(x)\big) = a\big(Q_1(x)^2 - Q_2(x)^2\big) + b\big(Q_1(x) - Q_2(x)\big);$$
$$R\big(P(x)\big) = R(x) \cdot \big(aQ_1(x) + aQ_2(x) + b\big).$$
Iloczyn po prawej stronie jest wielomianem stopnia $m + n$; wielomian po lewej stronie ma stopień $2m$. To już sprzeczność, skoro $m < n$; dwa różne wielomiany Q_1, Q_2 stopnia n o podanej własności istnieć nie mogą.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 757 ($WT = 1{,}90$) i 758 ($WT = 3{,}40$) z numeru 3/2018

Tomasz Choczewski	Szczecin	40,78
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Tomasz Wietecha	Tarnów	38,19
Janusz Olszewski	Warszawa	37,45
Michał Miodek	Warszawa	36,24
Piotr Kumor	Olsztyn	35,09
Krzysztof Kamiński	Pabianice	34,29
Paweł Kubit	Kraków	32,77

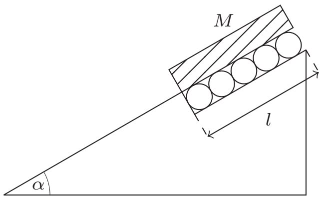
764. Liczby a, b, o jakie pyta zadanie, istnieją; można znaleźć wiele takich par. Przykład Autora (W. Bednarek): $a = 21$, $b = 4$. Wówczas $x_1 = 21$, $x_2 = 25$, i dalej (dla każdego n):
$$x_{n+1} = 4 + x_1 \cdot \ldots \cdot x_n,$$
$$x_{n+2} = 4 + x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} = 4 + (x_{n+1} - 4)x_{n+1} = (x_{n+1} - 2)^2$$
– jest to liczba złożona (różnica w ostatnim nawiasie przekracza 1, bo ciąg jest rosnący).

Zadania z fizyki nr 664, 665

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2018

664. Jednorodny klocek o masie M i długości l zaczyna poruszać się w dół po nachylonej płaszczyźnie tworzącej z poziomem kąt α. Początkowy odcinek o długości l nachylonej płaszczyzny wypełniają blisko siebie położone rurki o masach m i promieniach $r \ll l$, które mogą obracać się bez tarcia (rys. 1). Znaleźć zależność przyspieszenia klocka od jego przesunięcia wzdłuż płaszczyzny. Klocek nie ślizga się po rurkach.



Rys. 1

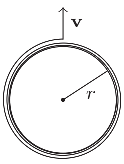
665. Równomiernie naładowaną na powierzchni, cienką płytkę z dielektryka w kształcie równoramiennego trójkąta prostokątnego, złożono na pół. Wykonana została przy tym praca W przeciw siłom pola elektrycznego. Jaką pracę trzeba wykonać, żeby ponownie złożyć na pół otrzymany trójkąt?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2018

Przypominamy treść zadań:

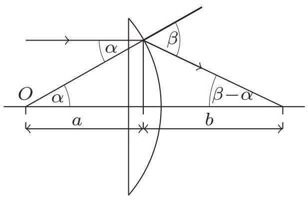
660. Soczewka płaskowypukła wykonana jest ze szkła o współczynniku załamania $n = 1,6$. Promień powierzchni wypukłej wynosi $R = 10$ cm, grubość soczewki $d = 0,2$ cm. Na powierzchnię płaską soczewki pada równolegle do jej osi optycznej wiązka światła. Gdy odsłonięta jest tylko niewielka część soczewki wokół osi optycznej, promienie ogniskują się na ekranie. Znaleźć średnicę plamki na ekranie po odsłonięciu całej soczewki.

661. Podstawa walca przytwierdzona jest do gładkiej powierzchni poziomej. Nitkę przymocowano jednym końcem do powierzchni bocznej walca przy jego podstawie o promieniu r i owinięto wokół walca k razy (k jest liczbą całkowitą). Do swobodnego końca nitki przyczepiono kulkę i nadano jej prędkość v skierowaną wzdłuż promienia walca (rys. 2). Po jakim czasie cała nitka ponownie nawinie się na walec?



Rys. 2

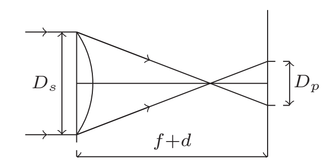
660. Rozważmy promień równoległy do osi optycznej, który po przejściu przez soczewkę pada na powierzchnię sferyczną pod kątem α i załamuje się pod kątem β (rys. 3). Odległość środka krzywizny O od punktu przecięcia promienia załamanego z osią optyczną soczewki wynosi $l = a + b$, gdzie $a = R\cos\alpha$, $b = R\sin\alpha/\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$, $\sin\beta = n\sin\alpha$. Podstawiając, otrzymujemy



Rys. 3

$$(*) \qquad l(\alpha) = \frac{R}{\cos\alpha - \sqrt{\frac{1}{n^2} - \sin^2\alpha}}.$$

Funkcja $l(\alpha)$ maleje ze wzrostem kąta α. Gdy promień pada na koniec soczewki, kąt α jest maksymalny i spełnia równanie $\cos\alpha_{max} = 1 - d/R$. Dla podanych danych liczbowych maksymalny kąt α jest większy od kąta granicznego, zatem wszystkie promienie wiązki padające na soczewkę załamują się na jej powierzchni sferycznej (rys. 4). Skrajne promienie wiązki przecinają oś optyczną w odległości $\Delta l = l(0) - l(\alpha_{max})$ od ekranu. Zgodnie z $(*)$,



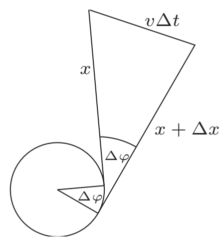
Rys. 4

$$l(0) = \frac{Rn}{n-1} = R + f,$$

gdzie $f = R/(n-1)$ jest ogniskową cienkiej soczewki płaskowypukłej. Szukana średnica plamki na ekranie dana jest wzorem

$$D_p = \frac{D_s\Delta l}{f + d - \Delta l} = 0{,}27 \text{ cm},$$

gdzie $D_s = 2\sqrt{d(2R-d)}$ jest średnicą soczewki.



Rys. 5

661. Nitka działa na kulkę siłą prostopadłą do prędkości kulki, zatem wartość prędkości kulki podczas ruchu jest stała i wynosi v. Rozważmy krótki przedział czasu Δt podczas odwijania się nitki (rys. 5). Niech x oznacza długość odwiniętej części nitki w chwili t. Po czasie Δt nitka odwinie się o dodatkowe $\Delta x = r\Delta\varphi$, a kulka przebędzie drogę $v\Delta t$. Zachodzi związek

$$rv\Delta t = x\Delta x = \frac{\Delta\left(x^2\right)}{2}.$$

Dodając wszystkie przedziały czasowe, otrzymujemy czas odwijania się nitki z walca $t_1 = l^2/(2rv)$, gdzie $l = 2\pi rk$ jest długością nitki. Zanim nitka zacznie ponownie nawijać się na walec, kulka musi przebyć drogę πl w czasie $t_2 = \pi l/v$. Czas nawijania równy jest czasowi odwijania, szukany czas całkowity to

$$t = 2t_1 + t_2 = 2\pi^2 kr\frac{2k+1}{v}.$$