Informatyczny kącik olimpijski (120): *Piramidy*

Tym razem omówimy zadanie z XII OIG.

Dana jest prostokątna plansza A o wymiarach $n \times m$. Wiersze zostały ponumerowane od 1 do n, zaś kolumny od 1 do m. Pole $(1,1)$ znajduje się w lewym górnym rogu planszy. Niektóre pola mają przypisaną wartość 1, pozostałe wartość 0 ($A[x][y]$ oznacza wartość pola (x,y)). Zerowym kwadratem nazywamy kwadrat, który pokrywa tylko zera. Dla każdej liczby całkowitej r z przedziału $[1;\min(n,m)]$ należy policzyć, ile jest zerowych kwadratów o boku r.

Wstęp

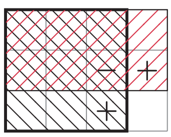
Naszym zadaniem jest obliczenie wartości $w_1, w_2, \ldots, w_{\min(n,m)}$, gdzie w_i oznacza liczbę zerowych kwadratów o boku i. Załóżmy przez chwilę, że dla każdego pola (x,y) mamy obliczoną wartość $D[x][y]$ – rozmiar największego zerowego kwadratu, którego prawym dolnym rogiem jest pole (x,y). Zauważmy, że pole (x,y) jest również prawym dolnym rogiem zerowych kwadratów o boku: $1, 2, \ldots, D[x][y]$. Rozważmy teraz ciąg $w'_1, w'_2, \ldots, w'_{\min(n,m)}$, gdzie w'_i oznacza liczbę wystąpień wartości i w tablicy D. Wówczas $w_i = w'_i + w'_{i+1} + \ldots + w'_{\min(n,m)}$.

Sumy prefiksowe

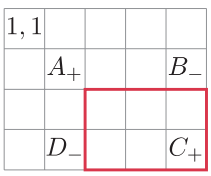
Niech $S[x][y]$ oznacza sumę wartości w prostokącie, którego lewe górne pole ma współrzędne $(1,1)$, zaś prawe dolne (x,y). Formalnie: $S[x][y] = \sum_{i=1}^{x}\sum_{j=1}^{y} A[i][j]$. Obliczenie tablicy sum prefiksowych można zrealizować w czasie liniowym względem rozmiaru prostokąta, korzystając z poniższych zależności:

- $S[1][1] = A[1][1]$;
- $S[x][1] = S[x-1][1] + A[x][1]$ dla $x > 1$;
- $S[1][y] = S[1][y-1] + A[1][y]$ dla $y > 1$;
- $S[x][y] = A[x][y] + S[x-1][y] + S[x][y-1] - S[x-1][y-1]$;

  $S[x][y]$ jest sumą: wartości pola (x,y), prostokąta bez ostatniego wiersza, prostokąta bez ostatniej kolumny, pomniejszoną o sumę prostokąta bez ostatniego wiersza i ostatniej kolumny, który został dodany dwa razy.



Zastanówmy się teraz, jak za pomocą tablicy sum prefiksowych obliczyć sumę wartości w prostokącie w czasie stałym. Niech A, B, C, D będą prostokątami, których lewe górne pole ma współrzędne $(1,1)$, zaś prawe dolne pole zostało wskazane na poniższym rysunku.



Załóżmy, że chcemy obliczyć sumę wartości w kolorowym prostokącie. Jest to $S(C) - S(B) - S(D) + S(A)$, gdzie $S(X)$ oznacza sumę wartości w prostokącie X.

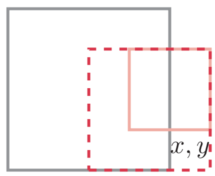
Rozwiązanie $O(nm \cdot \log(\min(n,m)))$

W tym podejściu wyznaczymy wartości tablicy D przy wykorzystaniu metody wyszukiwania binarnego po wyniku. Załóżmy, że chcemy obliczyć wartość $D[x][y]$ dla ustalonych x, y. Jeśli $A[x][y] = 1$, wtedy $D[x][y] = 0$. W przeciwnym przypadku $D[x][y]$ jest liczbą całkowitą z przedziału $[1;\min(x,y)]$. Tę wartość możemy wyszukać binarnie po wyniku, korzystając z faktu: *Jeśli (x,y) jest prawym dolnym rogiem zerowego kwadratu o boku r, to jest również prawym dolnym rogiem każdego mniejszego zerowego kwadratu.* Sprawdzenie, czy (x,y) jest prawym dolnym rogiem zerowego kwadratu o boku r, można wykonać za pomocą sum prefiksowych w czasie $O(1)$. Algorytm wyszukiwania binarnego wykona $O(\log(\min(n,m)))$ takich faz. Wszystkich pól jest nm, zatem wyznaczenie tablicy D działa w czasie $O(nm \cdot \log(\min(n,m)))$.

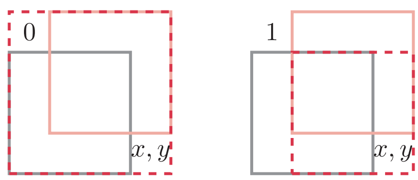
Rozwiązanie dynamiczne $O(nm)$

W tym podejściu wyznaczymy wartości tablicy D przy wykorzystaniu metody programowania dynamicznego. Załóżmy, że chcemy obliczyć wartość $D[x][y]$ dla ustalonych x, y. Jeśli $A[x][y] = 1$, wtedy $D[x][y] = 0$. W przeciwnym przypadku rozpatrujemy następujące możliwości.

- Jeśli $x = 1$ lub $y = 1$, wtedy $D[x][y] = 1$. Dla wszystkich pól w pierwszym wierszu oraz w pierwszej kolumnie największy kwadrat ma rozmiar 1.
- Jeśli $x, y > 1$ oraz $D[x-1][y] \neq D[x][y-1]$, wtedy $D[x][y] = 1 + \min(D[x-1][y], D[x][y-1])$.



- Jeśli $x, y > 1$ oraz $D[x-1][y] = D[x][y-1]$, wtedy $D[x][y] = k + l$, gdzie $k = D[x-1][y]$, zaś $l = 1$, jeśli $A[i-k][j-k] = 0$ i $l = 0$ w przeciwnym przypadku.



Obliczenie wartości $D[x][y]$ dla ustalonego (x,y) odbywa się w czasie $O(1)$. Plansza ma nm pól, zatem wyznaczenie tablicy D działa w czasie $O(nm)$.

Bartosz ŁUKASIEWICZ